Álvaro Andrini

PRATICANDO MATEMÁTICA

MESTRE

7ª série

MEC FAE PNLD
VENDA PROIBIDA
CÓDIGO: 0411-1
TIPO: M

EDITORA DO BRASIL S/A

ISBN 85-10-01257-1
ISBN 85-10-01258-X (Livro do Professor)

Registre aqui a história deste livro:

Nome da Escola

Nome do aluno	Ano
Nome do aluno	Ano
Nome do aluno	Ano

ÁLVARO ANDRINI

Praticando Matemática

7ª Série

- *As respostas constam apenas no livro do professor.*
- *O planejamento de curso encontra-se num suplemento especial, no final do livro.*

EDITORA DO BRASIL S/A

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo

Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Andrini, Álvaro.
Praticando matemática : 7ª série / Álvaro Andrini. -- São Paulo : Editora do Brasil, 1989.

Suplementado por livro do mestre.

1. Matemática (1º grau) I. Título.

89-0743 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 1º grau 372.7

Nossa capa

O retilíneo das linhas, os ângulos e a regularidade das faces, representativas do tesouro que a natureza nos oferece, simbolizam a grandiosidade dos princípios da Matemática.

Reprodução: *Gemas do Brasil*
Gentileza: *H B Consultores Associados S/C Ltda.*

APRESENTAÇÃO

Os quatro volumes desta coleção, destinada às quatro últimas séries do 1º grau, foram enriquecidos a partir da experiência em sala de aula e de algumas sugestões de colegas.
As características básicas da obra são as seguintes:

- *Cada capítulo está assim esquematizado:*
  - *desenvolvimento da teoria;*
  - *exercícios resolvidos;*
  - *exercícios propostos;*
  - *exercícios complementares;*
  - *testes.*

- *A* teoria *é exposta numa* linguagem clara e sucinta, *de acordo com o nível a que se destina, sem, no entanto, abandonar o rigor necessário ao tratamento da matéria.*

- *Os* exercícios resolvidos *servem de apoio aos conceitos teóricos.*

- *Os* exercícios resolvidos *e os* exercícios propostos *apresentam uma seqüência crescente de dificuldade.*

- *Os* exercícios complementares *podem ser utilizados como reforço e/ou revisão da matéria.*

- *Constituem* inovações da obra:
  - capítulos curtos: *os capítulos longos da edição anterior foram eliminados pela divisão do assunto, para proporcionar inter-relação e revisão mais constantes;*
  - séries de exercícios totalmente refeitas, *apresentando os mais diferentes tipos de questões;*
  - exercícios resolvidos intercalados nos exercícios propostos, *para que o aluno tenha neles um suporte ao refletir sobre dificuldades encontradas;*
  - *inclusão de* testes de vestibulares *adequados ao tratamento dado à matéria nesta coleção.*

Agradecemos, antecipadamente, todas as críticas e sugestões que nos forem enviadas.

O Autor

ÍNDICE

1

RAIZ QUADRADA

DEFINIÇÃO

Chama-se raiz quadrada de um número natural, um segundo número natural cujo quadrado é igual ao número dado.

Exemplos:

a) $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$

b) $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 100$

NÚMEROS QUADRADOS PERFEITOS

Vamos calcular os quadrados dos primeiros números naturais:

$0^2 = 0$
$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$\vdots \quad \vdots$

Os números: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... chamam-se **quadrados perfeitos.** Somente esses números possuem raiz quadrada exata em IN.

RAIZ QUADRADA APROXIMADA

Vamos calcular a raiz quadrada do número 23. Esse número está compreendido entre os quadrados perfeitos 16 e 25.

Veja: $16 < 23 < 25$

Extraindo a raiz quadrada desses números, temos:

$$\sqrt{16} < \sqrt{23} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{23} < 5$$

Dizemos então que:

- *4 é raiz quadrada aproximada, por falta, de 23.*
- *5 é a raiz quadrada aproximada, por excesso, de 23.*

Geralmente se considera como raiz quadrada de um número não-quadrado perfeito a **raiz aproximada por falta.**

Assim:

$\sqrt{23} \simeq 4$ Resto $= 23 - 4^2$
$= 23 - 16$
$= 7$

Significa: raiz quadrada de 23 é aproximadamente igual a 4.

EXERCÍCIOS

1) Determine cada raiz, justificando o resultado:

Resolvido. $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$

a) $\sqrt{4}$ *2*
b) $\sqrt{64}$ *8*
c) $\sqrt{81}$ *9*
d) $\sqrt{49}$ *7*
e) $\sqrt{0}$ *0*
f) $\sqrt{1}$ *1*
g) $\sqrt{100}$ *10*
h) $\sqrt{121}$ *11*
i) $\sqrt{169}$ *13*
j) $\sqrt{400}$ *20*
l) $\sqrt{900}$ *30*
m) $\sqrt{225}$ *15*

2) Que número deve ser colocado no quadrinho?

a) $\sqrt{\square} = 0$ *0*
b) $\sqrt{\square} = 7$ *49*
c) $\sqrt{\square} = 10$ *100*
d) $\sqrt{\square} = 11$ *121*
e) $\sqrt{\square} = 13$ *169*
f) $\sqrt{\square} = 15$ *225*

3) Calcule:

a) $\sqrt{1} + \sqrt{0}$ *1*

b) $\sqrt{64} - \sqrt{49}$ *1*

c) $15 + \sqrt{81}$ *24*

d) $2 + \sqrt{\frac{4}{9}}$ $\frac{8}{3}$

e) $-3 + \sqrt{16}$ *1*

f) $-5 - \sqrt{36}$ *−11*

g) $3\sqrt{16} - 9$ *3*

h) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{9}}{2}$ *2*

4) Situe $\sqrt{12}$ entre dois números naturais consecutivos.

Solução:

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16 \leftarrow 12$

$\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$

$3 < \sqrt{12} < 4$

Podemos concluir que $\sqrt{12}$ está compreendido entre 3 e 4.

5) Situe entre dois números naturais consecutivos:

a) $\sqrt{7}$ *(2 e 3)*

b) $\sqrt{19}$ *(4 e 5)*

c) $\sqrt{28}$ *(5 e 6)*

d) $\sqrt{43}$ *(6 e 7)*

e) $\sqrt{54}$ *(7 e 8)*

f) $\sqrt{85}$ *(9 e 10)*

6) Determine as raízes quadradas aproximadas por falta e, a seguir, calcule o resto da raiz.

a) $\sqrt{13}$ *3 e r = 4*

b) $\sqrt{17}$ *4 e r = 1*

c) $\sqrt{28}$ *5 e r = 3*

d) $\sqrt{38}$ *6 e r = 2*

e) $\sqrt{70}$ *8 e r = 6*

f) $\sqrt{85}$ *9 e r = 4*

7) O número $(1{,}4)^2$ é maior ou menor que 2?

$1{,}96 < 2$ Resp.: menor

8) Qual é o maior:

a) 8 ou $\sqrt{16}$? *8*

b) $\sqrt{6}$ ou 3? *3*

c) $\sqrt{18}$ ou 4? $\sqrt{18}$

d) 6 ou $\sqrt{40}$? $\sqrt{40}$

e) 1,5 ou $\sqrt{3}$? $\sqrt{3}$

f) 4,5 ou $\sqrt{20}$? *4,5*

REGRA PRÁTICA PARA A EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA

Vamos estudar uma regra prática para a extração da raiz quadrada exata ou aproximada.

Exemplo 1

Extrair a raiz quadrada do número 1851.

1 $\sqrt{18.51}$

1) **Separamos o número dado em grupos de dois algarismos, da direita para a esquerda.**

2 $\sqrt{18.51}$ | 4

2) **Extraímos a raiz quadrada (exata ou aproximada) do primeiro grupo à esquerda.**

3 $\sqrt{18.51}$ | 4
− 16
2

3) **Elevamos 4 ao quadrado (igual a 16). O resultado, subtraímos do primeiro grupo.**

4 $\sqrt{18.51}$ | 4
− 16
25.1

4) **Abaixamos o grupo seguinte ao lado do resto 2, e separamos com um ponto o último algarismo da direita.**

5 $\sqrt{18.51}$ | 4
− 16 | 8
25.1

5) **Dobramos o número formado pelo primeiro algarismo da raiz.**

6 $\sqrt{18.51}$ | 4
− 16 | 8 ... x ...
25.1

6) **Dividimos o número à esquerda do resto (25) pelo dobro da raiz (8) e o quociente (3)** ***poderá*** **ser o segundo algarismo da raiz.**

7 $\sqrt{18.51}$ | 4
− 16 | $83 \times 3 = 249$
25.1

7) **Escrevemos o quociente obtido (3) ao lado do dobro da raiz (8). A seguir, multiplicamos o número formado (83) pelo mesmo quociente (3). Como 249 é menor que 251, o (3) é o segundo algarismo da raiz.**

8 $\sqrt{18.51}$ | 43
− 16 | $83 \times 3 = 249$
25.1
− 249
2

8) **Subtraímos 249 de 251, obtendo o resto 2.**

Então: $\sqrt{1851} = 43$ (raiz aproximada)

Exemplo 2

Extrair a raiz quadrada do número 64127.

```
√6.41.27  | 253
- 4       |______________
_____     | 45 × 5 = 225
  24.1    |_________________
  22 5    | 503 × 3 = 1509
  ______  |
   162.7  |
   1509   |
   ______ |
     118  |
```

Prova da extração

Você deve verificar:

1º) Se o resto é menor ou igual ao dobro da raiz.

2º) Se o quadrado da raiz mais o resto é igual ao número dado.

No exemplo acima, temos:

1º) $118 < 2 \times 253$

2º) $253^2 + 118 = 64127$

EXERCÍCIOS

1) Determine a raiz quadrada exata:

a) $\sqrt{225}$ 15
b) $\sqrt{324}$ 18
c) $\sqrt{529}$ 23
d) $\sqrt{784}$ 28
e) $\sqrt{1369}$ 37
f) $\sqrt{1681}$ 41
g) $\sqrt{3481}$ 59
h) $\sqrt{4624}$ 68
i) $\sqrt{5476}$ 74
j) $\sqrt{7225}$ 85
l) $\sqrt{15876}$ 126
m) $\sqrt{10609}$ 103

2) Determine a raiz quadrada aproximada:

a) $\sqrt{730}$ 27 (r = 1)
b) $\sqrt{1234}$ 35 (r = 9)
c) $\sqrt{3257}$ 57 (r = 8)
d) $\sqrt{8000}$ 89 (r = 79)
e) $\sqrt{15140}$ 123 (r = 11)
f) $\sqrt{54786}$ 234 (r = 30)
g) $\sqrt{168115}$ 410 (r = 15
h) $\sqrt{283042}$ 532 (r = 18
i) $\sqrt{385645}$ 621 (r = 4

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Por que a raiz quadrada de 900 é 30?

Porque $30^2 = 900$

2) Dê o valor de:

a) $\sqrt{81}$ *9*
b) $\sqrt{36}$ *6*
c) $\sqrt{144}$ *12*
d) $\sqrt{196}$ *14*
e) $\sqrt{1600}$ *40*
f) $\sqrt{2500}$ *50*

3) Dê o valor de:

a) $\sqrt{100}$ *10*
b) $-\sqrt{100}$ *– 10*
c) $\sqrt{121}$ *11*
d) $-\sqrt{121}$ *– 11*
e) $\sqrt{400}$ *20*
f) $-\sqrt{400}$ *– 20*

4) Dê o valor de:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\frac{2}{3}$
b) $-\sqrt{\frac{1}{16}}$ $-\frac{1}{4}$
c) $\sqrt{\frac{64}{81}}$ $\frac{8}{9}$
d) $\sqrt{\frac{49}{25}}$ $\frac{7}{5}$
e) $-\sqrt{\frac{25}{81}}$ $-\frac{5}{9}$
f) $\sqrt{\frac{121}{100}}$ $\frac{11}{10}$

5) Calcule:

a) $10 \cdot \sqrt{4}$ *20*
b) $3 + \sqrt{25}$ *8*
c) $1 - \sqrt{\frac{4}{9}}$ $\frac{1}{3}$
d) $\sqrt{81} - \sqrt{9}$ *6*
e) $\sqrt{100} - \sqrt{25}$ *5*
f) $\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{2}$
g) $-4 - \sqrt{121}$ *– 15*
h) $-10 + \sqrt{169}$ *3*
i) $5 \cdot \sqrt{\frac{4}{100}}$ *1*

6) *Dê o valor de:*

Resolvido. $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ porque $(1{,}3)^2 = 1{,}69$

a) $\sqrt{121}$ *11*
b) $\sqrt{1{,}21}$ *1,1*
c) $\sqrt{144}$ *12*
d) $\sqrt{1{,}44}$ *1,2*
e) $\sqrt{49}$ *7*
f) $\sqrt{0{,}49}$ *0,7*

7) Obtenha os números que são valores de $\frac{5 + \sqrt{169}}{2}$ e $\frac{5 - \sqrt{169}}{2}$.

Resp.: 9 e – 4

8) Situe entre dois números naturais consecutivos:

a) $\sqrt{5}$ (2 e 3)
c) $\sqrt{30}$ (5 e 6)
e) $\sqrt{95}$ (9 e 10)

b) $\sqrt{20}$ (4 e 5)
d) $\sqrt{60}$ (7 e 8)
f) $\sqrt{109}$ (10 e 11)

9) Coloque em ordem crescente os seguintes números:

a) $\sqrt{31}, \sqrt{7}, \sqrt{63}, \sqrt{45}, \sqrt{85}, \sqrt{15}$

$\sqrt{7}, \sqrt{15}, \sqrt{31}, \sqrt{45}, \sqrt{63}, \sqrt{85}$

b) $\sqrt{35}$, 3 , $\sqrt{58}$, 6 , $\sqrt{27}$, 10 , $\sqrt{18}$

3, $\sqrt{18}, \sqrt{27}, \sqrt{35}$, 6, $\sqrt{58}$, 10

10) Qual é o maior número: $(1,5)^2$ ou $\sqrt{4}$? $(1,5)^2$

11) Calcule a raiz quadrada exata dos seguintes números:

a) 676 (26)
d) 2704 (52)
g) 14161 (119)

b) 1225 (35)
e) 6889 (83)
h) 26244 (162)

c) 1849 (43)
f) 8281 (91)
i) 46225 (215)

12) Calcule a raiz quadrada aproximada por falta a menos de uma unidade dos seguintes números:

a) 2407 (49)
c) 5048 (71)
e) 18000 (134)

b) 3365 (58)
d) 8475 (92)
f) 61580 (248)

TESTES

1) Sejam as afirmações:

I) $\sqrt{81} = \sqrt{9}$ (F)
II) $\sqrt{16} = 8$ (F)
III) $\sqrt{125} = 15$ (F)

Quantas são verdadeiras?

■ a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

2) Se $\sqrt{x} = 30$, então o valor de x é:

a) 60
b) 90
c) 600
■ d) 900

3) O valor da expressão $\sqrt{0} + \sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{4}}$ é:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{2}$
■ c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}$

4) O valor da expressão $7^0 - \sqrt{64} + 3^2$ é:

■ a) 2
b) 1
c) −1
d) 8

5) O valor da expressão $\sqrt{0{,}16} + \sqrt{0{,}36}$ é:

■ a) 1
b) 0,2
c) 0,26
d) 0,52

6) O valor de $\sqrt{\frac{2}{72}}$ é:

a) $\frac{1}{36}$
b) 6
c) $\frac{1}{3}$
■ d) $\frac{1}{6}$

7) O valor da expressão $\sqrt{\frac{1}{9}} + \frac{\sqrt{4}}{3}$ é:

a) 3
b) $\frac{7}{9}$
■ c) 1
d) 2

8) O valor da expressão $\dfrac{\frac{1}{2} + 5{,}5}{\sqrt{9}}$ é:

a) 1
■ b) 2
c) 3
d) 4

9) O número $\sqrt{120}$:

a) é menor que 10
■ b) é maior que 10
c) é maior que 12
d) é igual a 12

10) O número $\sqrt{54}$ está compreendido entre:

a) 3 e 4
b) 4 e 5
c) 5 e 6
■ d) 7 e 8

11) (CESGRANRIO-RJ) Um número x, que satisfaz $\sqrt{35} < x < \sqrt{39}$, é:

a) 5,7
b) 5,8
■ c) 6
d) 6,6

12) Os dois números naturais consecutivos x e y tais que $x < \sqrt{50} < y$ são, respectivamente, iguais a:

a) 6 e 7
■ b) 7 e 8
c) 24 e 26
d) 49 e 51

13) A raiz quadrada do número 11236 é:

■ a) 106
b) 107
c) 108
d) 109

14) O resto da raiz quadrada aproximada por falta a menos de uma unidade do número 3140 é:

a) 1
b) 2
c) 3
■ d) 4

15) (UMC-SP) Seja $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt[n]{125}$. O valor de n é:

a) 1
b) 2
■ c) 3
d) 4

$\sqrt{25} = \sqrt[n]{125}$

$5 = \sqrt[n]{125} \Rightarrow n = 3$

16) A metade da raiz quadrada de um número x é igual a 5. Então, o valor de x é:

a) 10
b) 25
c) 50
■ d) 100

$\frac{\sqrt{x}}{2} = 5$

$\sqrt{x} = 10$

$x = 100$

2

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

NÚMEROS RACIONAIS

Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ com a e b inteiros.

Exemplos:

a) $5 = \frac{5}{1}$

b) $-2 = -\frac{2}{1}$

c) $0{,}7 = \frac{7}{10}$

d) $2{,}83 = \frac{283}{100}$

e) $0{,}444\ldots = \frac{4}{9}$

f) $0{,}7272\ldots = \frac{72}{99}$

Observe que:

- *Todo número inteiro é um número racional.* (exemplos **a** e **b**)
- *Toda decimal exata é um número racional.* (exemplos **c** e **d**)
- *Toda decimal periódica é um número racional.* (exemplos **e** e **f**)

NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números que não podem ser escritos em forma de fração são chamados de **números irracionais.**

Os números irracionais têm infinitas casas decimais e não são periódicos.

Exemplos:

a) 0,4137128 . . .

b) 7,1659314 . . .

c) – 0,4837616 . . .

d) – 2,8283541 . . .

As raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos são também **exemplos de números irracionais.**

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

b) $\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$

c) $\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$

d) $\sqrt{6} = 2{,}4494\ldots$

ATENÇÃO!

Observe que:

- $\sqrt{4}$ *é um número racional, pois* $\sqrt{4} = 2$.
- $\sqrt{9}$ *é um número racional, pois* $\sqrt{9} = 3$.

EXERCÍCIOS

1) Quais destes números são racionais?

- a) 4
- b) 8
- c) 0
- d) -7
- e) 0,3
- f) 2,9
- g) $-3{,}8$
- h) 0,473
- i) 1,845

2) Classifique em racional ou irracional cada número seguinte:

a) 0,777 . . . *racional.*
b) 4,1212 . . . *racional.*
c) 5,1318 . . . *irracional.*
d) 0,1465 . . . *irracional.*
e) 2,8181 . . . *racional.*
f) 4,845845 . . . *racional.*
g) 3,476581 . . . *irracional.*
h) 0,193238 . . . *irracional.*
i) 6,123123 . . . *racional.*
j) 1,234576 . . . *irracional.*

3) Determine as raízes apenas quando são números naturais.

a) $\sqrt{1}$ *1*
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{4}$ *2*
e) $\sqrt{5}$
f) $\sqrt{6}$
g) $\sqrt{7}$
h) $\sqrt{8}$
i) $\sqrt{9}$ *3*

Responda:

a) Quais dos números acima são racionais? *$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$*

b) Quais dos números acima são irracionais? *$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$*

4) Classifique em racional ou irracional cada número seguinte:

a) $\sqrt{12}$ *irracional.*
b) $\sqrt{15}$ *irracional.*
c) $\sqrt{16}$ *racional.*
d) $\sqrt{24}$ *irracional.*
e) $\sqrt{36}$ *racional.*
f) $\sqrt{49}$ *racional.*
g) $\sqrt{44}$ *irracional.*
h) $\sqrt{58}$ *irracional.*
i) $\sqrt{60}$ *irracional.*
j) $\sqrt{64}$ *racional.*
l) $\sqrt{72}$ *irracional.*
m) $\sqrt{81}$ *racional.*

NÚMEROS REAIS

A união dos conjuntos dos números racionais e irracionais chama-se conjunto dos números reais, que será indicado com $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{\text{números racionais}\} \cup \{\text{números irracionais}\}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{5}$ é um número racional. É também um número real.

b) $\sqrt{7}$ é um número irracional. É também um número real.

Note que todo número natural é também inteiro, todo inteiro é também racional e todo racional é também real.
Conclusão:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

EXERCÍCIOS

1) Observe o conjunto A e responda:

$A = \{\sqrt{6}, \sqrt{15}, \sqrt{20}, \sqrt{25}, \sqrt{30}, \sqrt{36}, \sqrt{40}, \sqrt{49}\}$

a) Quais elementos de A são números racionais? $\sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}$

b) Quais elementos de A são números irracionais? $\sqrt{6}, \sqrt{15}, \sqrt{20}, \sqrt{30}, \sqrt{40}$

c) Quais elementos de A são números reais? *Todos.*

2) Responda:

a) Todo número racional é real? *Sim.*

b) Todo número irracional é real? *Sim.*

c) Todo número real é racional? *Não.*

d) Todo número real é irracional? *Não.*

3) Quais destes números são reais?

■ a) $\sqrt{1}$ ■ c) $\sqrt{4}$ ■ e) $\sqrt{9}$

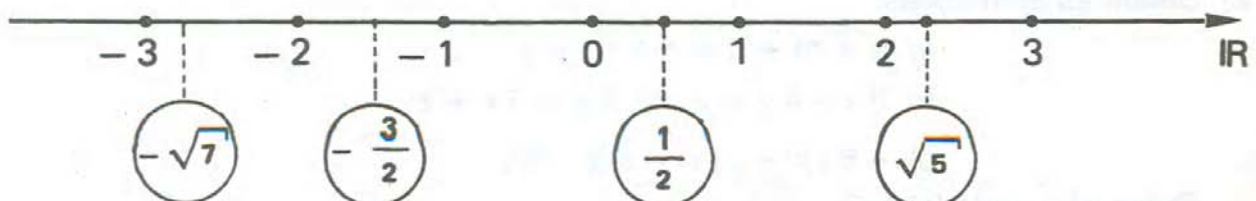
b) $\sqrt{-1}$ d) $\sqrt{-4}$ f) $\sqrt{-9}$

RETA REAL

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais.

Isto significa que:

- A cada número real corresponde um único ponto da reta.
- Cada ponto da reta é correspondente de um único número real.

Vamos localizar na reta alguns números reais.

OPERAÇÕES EM $\mathbb{R}$ – PROPRIEDADES

Todas as operações estudadas em Q e suas respectivas propriedades também são válidas em $\mathbb{R}$. Para quaisquer números reais a, b e c, temos:

ADIÇÃO

1) **Fechamento**

$(a+b) \in \mathbb{R}$

2) **Comutativa**

$a + b = b + a$

3) **Associativa**

$(a + b) + c = a + (b + c)$

4) **Elemento neutro**

$a + 0 = 0 + a = a$

5) **Elemento oposto**

$a + (-a) = 0$

MULTIPLICAÇÃO

1) **Fechamento**

$(a . b) \in \mathbb{R}$

2) **Comutativa**

$a . b = b . a$

3) **Associativa**

$(a . b) . c = a . (b . c)$

4) **Elemento neutro**

$a . 1 = 1 . a = a$

5) **Elemento inverso**

$a . \frac{1}{a} = 1 \ (a \neq 0)$

6) **Distributiva da multiplicação em relação à adição**

$a . (b + c) = a . b + a . c$

EXERCÍCIOS

1) Aplique a propriedade distributiva:

a) $5 . (x + y)$ $5x + 5y$

b) $2 . (3a + 4m)$ $6a + 8m$

c) $3 . (a + 2m)$ $3a + 6m$

d) $7 . (3x + y)$ $21x + 7y$

e) $a . (x - y)$ $ax - ay$

f) $4 . (2a - x)$ $8a - 4x$

g) $7 . (x - y)$ $7x - 7y$

h) $-7 . (x - y)$ $-7x + 7y$

i) $3 . (2x + y)$ $6x + 3y$

j) $-3 . (2x + y)$ $-6x - 3y$

l) $2 . (3a - 4y)$ $6a - 8y$

m) $-2 . (3a - 4y)$ $-6a + 8y$

2) Sejam as afirmações:

a) $a + m + n = n + m + a$

b) $3x - 4y + z = -4y + 3x + z$

c) $-5(x + y) = -5x - 5y$

Quais são verdadeiras? Todas.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Dê exemplos de:

a) três números racionais. $8, -3, \sqrt{4}$

b) três números irracionais. $\sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{20}$

2) Responda:

a) Um número racional pode ser escrito na forma de fração? *Sim.*

b) Um número irracional pode ser escrito na forma de fração? *Não.*

3) Classifique em racional ou irracional cada número seguinte:

a) $\sqrt{18}$ *irracional.*

b) $\sqrt{24}$ *irracional.*

c) $\sqrt{49}$ *racional.*

d) $\sqrt{81}$ *racional.*

e) $\sqrt{0}$ *racional.*

f) $\sqrt{54}$ *irracional.*

g) $\sqrt{67}$ *irracional.*

h) $\sqrt{72}$ *irracional.*

i) $\sqrt{100}$ *racional.*

4) Verifique se o número $\sqrt{2 + \sqrt{4}}$ é racional ou irracional.

Solução:

$$\sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

Resposta: É um número racional.

5) Verifique se o número $\sqrt{1 + \sqrt{9}}$ é racional ou irracional.

$\sqrt{1 + \sqrt{9}} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2.$ *É racional.*

6) Verifique se o número $\sqrt{5 + \sqrt{4}}$ é racional ou irracional.

$\sqrt{5 + \sqrt{4}} = \sqrt{5 + 2} = \sqrt{7}.$ *É irracional.*

7) Quais destes números são reais?

■ a) $\sqrt{42}$

■ b) $\sqrt{25}$

c) $\sqrt{-25}$

■ d) $\sqrt{16}$

e) $\sqrt{-16}$

■ f) $\sqrt{12}$

■ g) $\sqrt{64}$

h) $\sqrt{-64}$

■ i) $\sqrt{70}$

TESTES

1) O número $\pi = 3,141592\ldots$ é:

a) racional
b) irracional
c) natural
d) inteiro

2) Qual destes números é racional?

a) $\sqrt{48}$
b) $\sqrt{72}$
c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{1}$

3) Qual dentre os conjuntos abaixo é constituído somente de números irracionais?

a) $\{\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}\}$
b) $\{\sqrt{12}, \sqrt{15}, \sqrt{18}, \sqrt{21}\}$
c) $\{\sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{16}, \sqrt{18}\}$
d) $\{\sqrt{12}, \sqrt{16}, \sqrt{18}, \sqrt{20}\}$

4) Qual a afirmação verdadeira?

a) $\sqrt{10}$ é racional e $\sqrt{100}$ é irracional.
b) $\sqrt{10}$ é racional e $\sqrt{100}$ é racional.
c) $\sqrt{10}$ é irracional e $\sqrt{100}$ é racional.
d) $\sqrt{10}$ é irracional e $\sqrt{100}$ é irracional.

5) Qual destes números é irracional?

a) $\sqrt{\dfrac{6}{25}}$
b) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$
c) $-\sqrt{\dfrac{36}{25}}$
d) $-\sqrt{\dfrac{100}{49}}$

6) (OSEC-SP) Toda dízima periódica simples ou dízima periódica composta é:

a) número inteiro
b) número racional
c) número irracional
d) nenhuma das anteriores

7) Não representa número real:

a) $\sqrt{9}$
b) $-\sqrt{9}$
c) -9
d) $\sqrt{-9}$

8) (PUC-SP) Sabe-se que o produto de dois números irracionais pode ser um número racional. Um exemplo é:

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36}$
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$
c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36}$
d) $\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$

9) Dados os números:

I) $A = \sqrt{5^2 - 4^2}$ $= 3$

II) $B = \dfrac{\sqrt{144}}{5}$ $= \dfrac{12}{5}$

III) $C = \sqrt{4^2 - 2^2}$ $= \sqrt{12}$

IV) $D = \sqrt{\dfrac{2}{18}}$ $= \dfrac{1}{3}$

Quantos são racionais?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

10) (ESAN-SP) Qual a afirmação verdadeira?

a) Todo número racional é natural.
b) Todo número inteiro é real.
c) Existe número irracional que é inteiro.
d) Existe número natural que não é racional.

11) (FCC-SP) O valor da expressão $M = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, para $x = 4$, é um número:

a) racional, maior que 1 e menor que 2.
b) racional, maior que 0 e menor que 1.
c) irracional, maior que 2.
d) irracional, maior que 1 e menor que 2.

$M = \sqrt{1 + \sqrt{4}}$

$M = \sqrt{3} \simeq 1{,}73$

12) Sejam as afirmaçoes:

I) $5 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 5$
II) $7 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot 7$
III) $4x + y = y + 4x$
IV) $5x - 2y + z = -2y + z + 5x$

Quantas são verdadeiras?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

3

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

INTRODUÇÃO

Observe os dois tipos de expressões matemáticas:

Expressões numéricas

a) $7 - 1 + 4$

b) $2 . 5 - 3$

c) $8^2 - 1 + 4$

Expressões algébricas

a) $x + y - z$

b) $2x - 4a + 1$

c) $3x^2 - 5x + 9$

- **Expressões numéricas** – possuem apenas números.
- **Expressões algébricas** – possuem números e letras ou apenas letras.

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Para obter o valor numérico de uma expressão algébrica, você deve proceder do seguinte modo:

1º) Substituir as letras por números reais dados.

2º) Efetuar as operações indicadas, devendo obedecer à seguinte ordem:

a) potenciação

b) divisão e multiplicação

c) adição e subtração

IMPORTANTE!

- *Convém utilizar parênteses quando substituímos letras por* **números negativos.**

Exemplo 1

Calcular o valor numérico de $2x + 3a$ para $x = 5$ e $a = -4$.

Solução:

Vamos "trocar" x por 5 e a por – 4.

Veja:

$$\begin{aligned} 2x + 3a &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) \\ &= 10 + (-12) \\ &= 10 - 12 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcular o valor numérico de $x^2 - 7x + y$ para $x = 5$ e $y = -1$.

Solução:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + y &= 5^2 - 7 \cdot 5 + (-1) \\ &= 25 - 35 - 1 \\ &= 25 - 36 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcular o valor numérico de $\dfrac{2a + m}{a + m}$ para $a = -1$ e $m = 3$.

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{2a + m}{a + m} &= \frac{2 \cdot (-1) + 3}{(-1) + 3} \\ &= \frac{-2 + 3}{-1 + 3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcular o valor numérico de $7 + a - b$ para $a = \frac{2}{3}$ e $b = -\frac{1}{2}$.

Solução:

$$7 + a - b = 7 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{42 + 4 + 3}{6}$$

$$= \frac{49}{6}$$

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor numérico das expressões:

a) $x - y$ para $x = 5$ e $y = -4$ *Resp.: 9*

b) $3x + a$ para $x = 2$ e $a = 6$ *Resp.: 12*

c) $2x + m$ para $x = -1$ e $m = -3$ *Resp.: −5*

d) $m - 2a$ para $m = 3$ e $a = -5$ *Resp.: 13*

e) $x + y$ para $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{5}$ *Resp.:* $\frac{3}{10}$

f) $a - b$ para $a = 3$ e $b = -\frac{1}{2}$ *Resp.:* $\frac{7}{2}$

2) Calcule o valor numérico das expressões:

a) $a^3 - 5a$ para $a = -2$ *Resp.: 2*

b) $x^2 - 2y$ para $x = -3$ e $y = 5$ *Resp.: −1*

c) $3a^2 - b^2$ para $a = -2$ e $b = -7$ *Resp.: −37*

d) $5a^2 + 3ab$ para $a = -3$ e $b = 4$ *Resp.: 9*

e) $a^2 + 4a$ para $a = \frac{2}{3}$ *Resp.:* $\frac{28}{9}$

3) Determine os valores da expressão $b^2 - 4ac$ quando:

a) $a = 3$, $b = 2$ e $c = 4$ *Resp.: – 44*
b) $a = -2$, $b = 4$ e $c = 10$ *Resp.: 96*
c) $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$ *Resp.: 1*

4) Qual dos números abaixo verifica a igualdade $5x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$?

a) 0
b) 1
c) – 1
d) – 2

5) Calcule o valor numérico das expressões:

a) $\frac{1}{2}a + 3a$ para $a = 5$ *Resp.:* $\frac{35}{2}$

b) $\frac{x}{3} + 2x$ para $x = 10$ *Resp.:* $\frac{70}{3}$

6) Calcule o valor numérico das expressões:

a) $\frac{a^2 + b^3}{2}$ para $a = -1$ e $b = -2$ *Resp.:* $-\frac{7}{2}$

b) $\frac{ab + c}{ab - c}$ para $a = 2$, $b = 5$ e $c = 3$ *Resp.:* $\frac{13}{7}$

c) $\frac{a + b}{3} + \frac{2a}{5}$ para $a = 1$ e $b = -7$ *Resp.:* $-\frac{8}{5}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{a} + \frac{a^2}{4}$ para $x = -10$, $y = 8$ e $a = 2$ *Resp.: – 8*

7) Calcule $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$ para $x = -4$. *Resp.: – 6*

8) Calcule $\sqrt{a^2 + b^2}$ para $a = 3$ e $b = 4$. *Resp.: 5*

9) Calcule $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{7x - 3}$ para $x = 4$. *Resp.: 8*

10) Calcule $3^x + 3^{-x}$ para $x = 2$. *Resp.:* $\frac{82}{9}$

11) Calcule $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y}$ para $x = 1$ e $y = \dfrac{1}{2}$ *Resp.:* $\dfrac{9}{2}$

12) Calcule $x - \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x - 1}}$ para $x = 3$ *Resp.:* $\dfrac{13}{5}$

13) Sendo $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, calcule o valor de x para $a = 3$, $b = -7$ e $c = 2$. *Resp.: 2*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Determine o valor numérico de $5m + 2x$ para os casos:

a) $m = 2$ e $x = 3$ *Resp.: 16*
b) $m = 4$ e $x = -7$ *Resp.: 6*
c) $m = -4$ e $x = 9$ *Resp.: −2*
d) $m = -1$ e $x = -2$ *Resp.: −9*
e) $m = 8$ e $x = -10$ *Resp.: 20*
f) $m = 3$ e $x = \dfrac{1}{2}$ *Resp.: 16*

2) Calcule $p \cdot (p - 1) \cdot (p - 2)$ para $p = 5$. *Resp.: 60*

3) Calcule o valor numérico das expressões algébricas:

a) $x^2 - 5x + 8$ para $x = 2$ *(2)*
b) $x^2 - 5x + 8$ para $x = -2$ *(22)*
c) $x^2 + 2xy$ para $x = -4$ e $y = 0$ *(16)*
d) $x^2 + 2xy$ para $x = -2$ e $y = 3$ *(−8)*

4) Se $d = \dfrac{n(n - 3)}{2}$, calcule o valor de d para $n = 15$. *Resp.: 90*

5) Calcule o valor numérico das expressões algébricas:

a) $\dfrac{5a - m}{a^2 - 3m^2}$ para $a = 4$ e $m = 1$ *Resp:* $\dfrac{19}{13}$

b) $\dfrac{a + b + c}{5}$ para $a = -3$, $b = -9$ e $c = -8$ *Resp.: −4*

c) $\dfrac{a^2 + b^3}{b - a}$ para $a = -8$ e $b = -4$ *Resp.: 0*

6) Calcule o valor numérico de $\frac{x + y}{1 + xy}$ para $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{4}$. *Resp.:* $\frac{2}{3}$

7) Calcule o valor numérico de $\frac{3x^2 - \sqrt{y}}{5 - x}$ para $x = -2$ e $y = 16$. *Resp.:* $\frac{8}{7}$

8) Calcule o valor numérico de $\frac{5am}{a + \sqrt{m}}$ para $a = -2$ e $m = 25$. *Resp.:* $-\frac{250}{3}$

9) Existe o valor numérico da expressão $\frac{5x}{x - y}$ para $x = 2$ e $y = 2$? Por quê?

Não. Porque o denominador da fração é nulo.

TESTES

1) O valor numérico da expressão $x^6 - m^4$ para $x = -1$ e $m = -2$ é:

a) 14
b) -2
c) -7
■ d) -15

2) (FUVEST-SP) O valor da expressão $a^3 - 3a^2x^2y^2$, para $a = 10$, $x = 2$ e $y = 1$, é:

a) 100
b) 250
c) -150
■ d) -200

3) O valor numérico da expressão p . (p – a) . (p – b) . (p – c) para p = 5, a = 1, b = 2 e c = 3 é:

a) 30
b) 60
■ c) 120
d) 240

4) (MACK-SP) Se $A = x^2 + \frac{1}{5}$, o valor de A, quando $x = \frac{2}{5}$, é:

a) 1
■ b) $\frac{9}{25}$
c) $\frac{6}{25}$
d) $\frac{9}{5}$

5) O valor da expressão $\frac{a + b}{ab}$ para $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$ é:

a) 1

b) $\frac{3}{5}$

c) 2

d) $\frac{11}{2}$

6) (GV-SP) O valor numérico da expressão $\frac{x^2 - 4}{x + 2} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, para $x = 4$, é:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 6

7) (PUC-SP) O valor da expressão $\frac{3a - b}{1 - a}$ para $a = -1$ e $b = \frac{1}{2}$ é:

a) $\frac{7}{4}$

b) $-\frac{7}{4}$

c) $-\frac{1}{4}$

d) impossível

8) (UFSC-SP) Sendo $A = 2$, $B = -1$ e $C = 3$, o valor numérico da expressão $\frac{A^2 - 2B}{3C} + \frac{A}{6} + 3B$ é:

a) 2

b) $\frac{22}{9}$

c) -2

d) $-\frac{22}{9}$

9) (FUVEST-SP) O valor da expressão $\frac{a + b}{1 - ab}$, para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$, é:

a) 5

b) 1

c) 0

d) 6

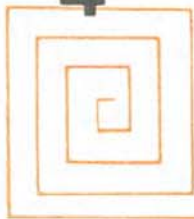
10) A expressão $\frac{7a}{a - 2}$ não possui valor numérico quando:

a) $a = 0$

b) $a = 2$

c) $a = -2$

d) $a = -7$

4

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

TERMO ALGÉBRICO OU MONÔMIO

Um produto de números reais, todos ou em parte sob representação literal, recebe o nome de **monômio** ou **termo algébrico.**

Exemplos:

a) $7x$

b) $\frac{4}{5}a^2$

c) $-5x^2y$

d) $-xyz$

Em todo monômio destacamos o **coeficiente numérico** e a **parte literal** (formada por letras).

Exemplos:

a) $7x$ → coeficiente: 7 → parte literal: x

b) $\frac{4}{5}a^2$ → coeficiente: $\frac{4}{5}$ → parte literal: a^2

c) $-5x^2y$ → coeficiente: -5 → parte literal: x^2y

d) $-xyz$ → coeficiente: -1 → parte literal: xyz

Observação:

- *Todo número real é um monômio sem parte literal.*

Exemplos:

a) 7 b) -8 c) $\frac{2}{5}$

EXERCÍCIOS

1) Quais das seguintes expressões são monômios?

■ a) $7x$ ■ c) $-9x^2y^3z$ e) $a + 2x$

b) $x + 4$ ■ d) $-\frac{3m^2}{2}$ f) $\frac{x^2 - y}{3}$

2) Dê o coeficiente e a parte literal de cada um dos seguintes monômios:

a) $8x$ $8; x$
b) $4xy^2$ $4; xy^2$
c) $-5ax$ $-5; ax$
d) $0{,}5m^4$ $0{,}5; m^4$
e) $-x^2y^3$ $-1; x^2y^3$
f) $-3x^5am^2$ $-3; x^5am^2$
g) $-2a^3m$ $-2; a^3m$
h) abc $1; abc$
i) $-am$ $-1; am$

3) Dê o coeficiente e a parte literal de cada um dos seguintes monômios:

a) $\frac{3}{5}x^2$ $\frac{3}{5}; x^2$
b) $-\frac{2}{3}y$ $-\frac{2}{3}; y$
c) $\frac{2a}{3}$ $\frac{2}{3}; a$
d) $\frac{m}{8}$ $\frac{1}{8}; m$
e) $-\frac{x}{7}$ $-\frac{1}{7}; x$
f) $-\frac{a^4m^5}{3}$ $-\frac{1}{3}; a^4m^5$

4) Complete o quadro:

Termo	Coeficiente	Parte literal
$-4x$	-4	x
$15am^2$	15	am^2
$-x^2$	-1	x^2

GRAU DE UM MONÔMIO

O grau de um monômio é dado pela soma dos expoentes de sua parte literal.

Exemplo 1

Qual o grau do monômio $7x^3y^2$?

Solução:

Somando-se os expoentes dos fatores literais, temos:

$3 + 2 = 5$ Resposta: 5º grau

Exemplo 2

Qual o grau do monômio $-8a^2bc$?

Solução:

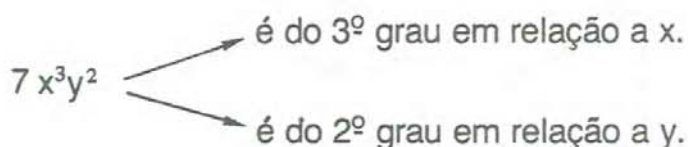
Somando-se os expoentes dos fatores literais, temos:

$2 + 1 + 1 = 4$ Resposta: 4º grau

Observação:

- *O grau de um monômio também pode ser dado em relação a uma letra de sua parte literal.*

Exemplo:

$7x^3y^2$ → é do 3º grau em relação a x.
$7x^3y^2$ → é do 2º grau em relação a y.

EXERCÍCIOS

1) Dê o grau de cada um dos seguintes monômios:

a) $5x^2$ (2º)
b) $4x^5y^3$ (8º)
c) $-2xy^2$ (3º)
d) a^3b^2 (5º)
e) $7xy$ (2º)
f) $-5y^3m^4$ (7º)
g) $6abc$ (3º)
h) $9x^3y^2z^5$ (10º)
i) $\frac{xy^2z}{7}$ (4º)

2) Dê o grau de cada monômio, nas condições indicadas:

I) $7xy^2$

a) grau (3º)
b) grau em relação a x. (1º)
c) grau em relação a y. (2º)

II) $-9x^3y^4$

a) grau (7º)
b) grau em relação a x. (3º)
c) grau em relação a y. (4º)

III) $-5x^2yz^5$

a) grau (8º)
b) grau em relação a x. (2º)
c) grau em relação a y. (1º)
d) grau em relação a z. (5º)

IV) $\frac{2}{3}abc^2$

a) grau (4º)
b) grau em relação a *a*. (1º)
c) grau em relação a *b*. (1º)
d) grau em relação a *c*. (2º)

POLINÔMIOS COM UMA VARIÁVEL

Polinômio é uma expressão algébrica de dois ou mais termos.

Exemplos:

❶ $7x - 1$

❷ $8x^2 - 4x + 5$

❸ $x^3 + x^2 - 5x + 4$

❹ $4x^5 - 2x^3 + 8x^2 - x + 7$

Convém destacar que:

- Os expoentes da variável devem ser números naturais: 1, 2, 3, 4, . . .
- Os polinômios de dois termos são chamados **binômios.** (exemplo ❶)
- Os polinômios de três termos são chamados **trinômios.** (exemplo ❷)
- Os polinômios com mais de três termos não têm nomes especiais. (exemplos ❸ e ❹)

GRAU DE UM POLINÔMIO A UMA VARIÁVEL

O grau de um polinômio é indicado pelo maior expoente da variável.

Exemplos:

a) $7x^4 - 3x^2 + 1$ é um polinômio do 4º grau.

b) $x^3 - 2x^5 + 4$ é um polinômio do 5º grau.

Em geral, os polinômios são ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

Exemplo:

- $5x^3 + x^4 + 6x - 7x^2 + 2$ (polinômio não-ordenado)
- $x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x + 2$ (polinômio ordenado)

Quando um polinômio estiver ordenado e estiver faltando uma ou mais potências, dizemos que os coeficientes desses termos são zero e o polinômio é **incompleto.**

Exemplo:

- $x^4 + 5x + 1$ (polinômio incompleto)
- $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 5x + 1$ (forma geral)

EXERCÍCIOS

1) Quais das expressões algébricas são polinômios com uma variável?

■ a) $x^2 + x - 5$
b) $xy + 1$
■ c) $6 + x - 3x^2$
d) $2x + y - xy$
■ e) $x + x^2$
f) $x^2y - 4$

2) Dê o grau de cada um dos polinômios:

a) $3x^5 - 1$ (5°)
b) $7x + 4$ (1°)
c) $x^2 - 8$ (2°)
d) $6x^5 + x$ (5°)
e) $6x^2 - 4x + 9$ (2°)
f) $7x - 5x^3 - 1$ (3°)
g) $x^4 + x^6 + 2$ (6°)
h) $8 + x + 3x^2 - 4x^3$ (3°)

3) Como se chama um polinômio

a) de dois termos? Dê um exemplo. *Binômio ($3x - 4$)*
b) de três termos? Dê um exemplo. *Trinômio ($5x^2 - x + 7$)*

4) Identifique como monômio, binômio ou trinômio:

a) $x^2 - 5$ *binômio*
b) $-10y^2$ *monômio*
c) $a + b + c$ *trinômio*
d) abc *monômio*
e) $-3xyz$ *monômio*
f) $5a^2 - 2a$ *binômio*
g) $7x^2 - 4x + 1$ *trinômio*
h) $-2y + abc$ *binômio*

5) Escreva na forma geral os polinômios incompletos:

a) $4x^2 - 1$ ($4x^2 + 0x - 1$)
b) $x^3 + 5x - 3$ ($x^3 + 0x^2 + 5x - 3$)
c) $7x^4 + x^3 - 1$ ($7x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x - 1$)
d) $x^4 - 2x + 8$ ($x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 8$)
e) $2x^4 + x^3 + 1$ ($2x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x + 1$)
f) $6x^5 + x - 4$ ($6x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x - 4$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Dê o coeficiente e a parte literal de cada um dos seguintes monômios:

a) $-3mn$ $-3;\ mn$
b) $7a^2bc$ $7;\ a^2bc$
c) $\frac{2xy^2}{5}$ $\frac{2}{5};\ xy^2$
d) $4x$ $4;\ x$
e) x $1;\ x$
f) $\frac{x}{7}$ $\frac{1}{7};\ x$
g) $-a^2b^3$ $-1;\ a^2b^3$
h) $abcd$ $1;\ abcd$
i) $-\frac{mn}{6}$ $-\frac{1}{6};\ mn$

2) Dê o grau de cada um dos seguintes monômios:

a) $7x^3$ (3°)
b) $-2xy^4$ (5°)
c) $4xy$ (2°)
d) $-a^2y^4$ (6°)
e) $8abc$ (3°)
f) $9a^2b^4c^5$ (11°)

3) Classifique como monômio, binômio ou trinômio:

a) $3x^2yz^4$ monômio
b) $5x^2-7y$ binômio
c) $13x-17$ binômio
d) $2-4a^2+a$ trinômio
e) $9abcd$ monômio
f) $13m-6m^2+m^4$ trinômio

4) Ordene o polinômio $2x^3-x^2+x^4-3+2x^5+4x$, segundo as potências decrescentes de x.
$2x^5+x^4+2x^3-x^2+4x-3$

TESTES

1) Qual das seguintes expressões é monômio?

a) $x+y$
b) $2x-3y$
■ c) $-7xy^2z$
d) $4x-5y^2$

2) O coeficiente numérico do monômio $-\frac{x}{3}$ é:

a) -1
■ b) $-\frac{1}{3}$
c) -3
d) 3

3) O monômio $4x^2yz^3$, em relação a x, é do:

■ a) 2º grau
b) 4º grau
c) 5º grau
d) 6º grau

4) O monômio $9x^2y^3z$ é do:

a) 5º grau
■ b) 6º grau
c) 7º grau
d) 9º grau

5) Qual o valor de m para que o monômio $15x^my^2$ seja do 8º grau?

a) 3
b) 4
■ c) 6
d) 10

6) O grau do monômio $5^p x^q y^r z$ é:

a) $p + q + r$
b) $p + q + r + 1$
c) $q + r$
■ d) $q + r + 1$

7) O polinômio $5x^2 - 7x^4 + 6$ é do:

a) 2º grau
■ b) 4º grau
c) 5º grau
d) 6º grau

8) O polinômio $0x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1$ é do:

a) 4º grau
■ b) 3º grau
c) 2º grau
d) 7º grau

9) A expressão $-10xyz$ é um:

■ a) monômio
b) binômio
c) trinômio
d) n.d.a.

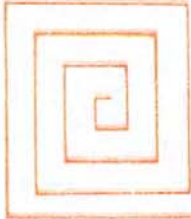
10) Qual a expressão que representa um trinômio?

a) $7 - 8x^2$
■ b) $5 + x - 4x^2$
c) $-9abc + d$
d) $6x^3 + 5x^2 - x + 1$

11) O polinômio que está ordenado segundo as potências decrescentes de x é:

a) $x^2 + 1 - 2x$
b) $x - 8x^2 + 4$
■ c) $x^3 + 4x^2 - 5x - 1$
d) $x - 8x^2 + 1 - 2x^3$

12) O polinômio incompleto em relação a x é:

a) $5x - 6$
b) $8x^2 - x + 5$
c) $5x^2 - 9x - 3$
■ d) $x^3 - 4x^2 - 1$

5 TERMOS SEMELHANTES

TERMOS SEMELHANTES

Dois ou mais termos são semelhantes quando têm a mesma parte literal.

Exemplos:

a) $5m$ e $-7m$ são termos semelhantes.

b) $2xy^3$ e $9y^3x$ são termos semelhantes.

- **Não importa a ordem dos fatores literais.**

Não são semelhantes os termos:

- $4x$ e $7x^2$
- $3xy^2$ e $4x^2y$

Observe que os expoentes de x são diferentes.

EXERCÍCIOS

1) Quais os pares de termos semelhantes?

- ■ a) $7a$ e $4a$
- ■ b) $2x^2$ e $-6x^2$
- c) $4y$ e $5y^2$
- ■ d) $8xy$ e $-xy$
- e) $5a$ e $-4ab$
- ■ f) $4ab$ e $\frac{5}{8}ab$
- ■ g) $8xy$ e $5yx$
- h) $4x^2y$ e $-xy$
- i) xy^2 e $2x^2y$
- ■ j) $3acb$ e abc
- l) $3am^2$ e $5a^2m$
- ■ m) $\frac{x}{2}$ e $7x$

2) Considere:

a) $3ab^2$ b) $-6x^2$ c) $8a^2b$ d) $7a^2b$ e) $5x$ f) $9x^2$ g) $-4x^2$ h) $-2ab^2$ i) $-ab^2$ j) $3ax$

Forme conjuntos de termos semelhantes.

$\{3ab^2, -ab^2, -2ab^2\}$, $\{-6x^2, 9x^2, -4x^2\}$, $\{8a^2b, 7a^2b\}$

REDUÇÃO DE TERMOS SEMELHANTES

Quando, numa mesma expressão, tivermos dois ou mais termos semelhantes, podemos reduzi-los todos a um único termo, usando a propriedade distributiva.

Exemplos:

1. $5x + 3x - 2x = (5 + 3 - 2)x = 6x$
2. $7xy - xy + 5xy = (7 - 1 + 5)xy = 11xy$

Conclusão:

Somamos os coeficientes e conservamos a parte literal.

EXERCÍCIOS

1) Reduza os termos semelhantes:

a) $8a + 2a$ $10a$
b) $7x - 5x$ $2x$
c) $2y^2 - 9y^2$ $-7y^2$
d) $4a^2 - a^2$ $3a^2$
e) $4y - 6y$ $-2y$
f) $-3m^2 + 8m^2$ $5m^2$
g) $6xy^2 - 8y^2x$ $-2xy^2$
h) $5a - 5a$ 0

2) Reduza os termos semelhantes:

a) $7x - 5x + 3x$ $5x$
b) $2y - y - 10y$ $-9y$
c) $4a + a - 7a$ $-2a$
d) $x^2 + x^2 - 2x^2$ 0
e) $ab - ab + 5ab$ $5ab$
f) $4x^3 - x^3 + 2x^3$ $5x^3$
g) $10x - 13x - x$ $-4x$
h) $8x - 10x + 4x$ $2x$

3) Reduza os termos semelhantes:

a) $8x + \frac{1}{2}x$ $\frac{17}{2}x$
b) $3a - \frac{2}{3}a$ $\frac{7}{3}a$
c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x$ $\frac{5}{6}x$
d) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2$ $\frac{1}{6}x^2$
e) $\frac{1}{2}y - \frac{2}{5}y$ $\frac{1}{10}y$
f) $2x + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x$ $\frac{7}{4}x$

Há casos em que numa expressão há termos diferentes e termos semelhantes entre si. Observe que a redução só pode ser feita com termos semelhantes.

Exemplo 1

$7x + 8y - 2x - 5y =$

$= 7x - 2x + 8y - 5y =$ • Agrupando os termos semelhantes.

$= 5x + 3y$

Exemplo 2

$4a^3 + 5a^2 + 7a - 2a^2 + a^3 - 9a + 6 =$

$= 4a^3 + a^3 + 5a^2 - 2a^2 + 7a - 9a + 6 =$ • Agrupando os termos semelhantes.

$= 5a^3 + 3a^2 - 2a + 6$

EXERCÍCIOS

1) Reduza os termos semelhantes:

a) $6a + 3a - 7$ *$9a - 7$*
b) $4a - 5 - 6a$ *$-2a - 5$*
c) $5x^2 + 3x^2 - 4$ *$8x^2 - 4$*
d) $x - 8 + x$ *$2x - 8$*
e) $4m - 6m - 1$ *$-2m - 1$*
f) $4a - 3 + 8$ *$4a + 5$*
g) $x^2 - 5x + 2x^2$ *$3x^2 - 5x$*
h) $4a - 2m - a$ *$3a - 2m$*
i) $y + 1 - 3y$ *$-2y + 1$*
j) $x + 3xy + x$ *$2x + 3xy$*

2) Reduza os termos semelhantes:

a) $7a - 2a + 4b - 2b$ *$5a + 2b$*
b) $5y^2 - 5x - 8y^2 + 6x$ *$-3y^2 + x$*
c) $9x^2 + 4x - 3x^2 + 3x$ *$6x^2 + 7x$*
d) $x + 7 + x - 10 - 1$ *$2x - 4$*
e) $x^3 - x^2 + 7x^2 + 10x^3 + 4$ *$11x^3 + 6x^2 + 4$*
f) $2x^3 - 7x^2 + 4x - 2 + 8 - 3x^2$ *$2x^3 - 10x^2 + 4x + 6$*
g) $4a^2b - 3b^2 - 6b^2 - 2a^2b - 1$ *$2a^2b - 9b^2 - 1$*

3) Reduza os termos semelhantes:

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + x$ $\quad \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y$

b) $4a - \frac{1}{2}a + 5 - \frac{1}{3}$ $\quad \frac{7}{2}a + \frac{14}{3}$

c) $\frac{1}{2}a - 3a^2 + a + 3a$ $\quad \frac{9}{2}a - 3a^2$

d) $4y - \frac{3}{5}y + \frac{1}{2} + 1$ $\quad \frac{17}{5}y + \frac{3}{2}$

e) $2m + 3 + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ $\quad \frac{5}{2}m + \frac{5}{2}$

ELIMINAÇÃO DE PARÊNTESES, COLCHETES E CHAVES

Vamos lembrar que:

Ao eliminar parênteses precedidos pelo sinal positivo (+), **não troque** os sinais dos termos incluídos nos parênteses.

Exemplo:

$$2x + (5x - 3) =$$
$$= 2x + 5x - 3 =$$
$$= 7x - 3$$

Ao eliminar parênteses precedidos pelo sinal negativo (–), **troque** os sinais dos termos incluídos nos parênteses.

Exemplo:

$$7x - (4x - 5) =$$
$$= 7x - 4x + 5 =$$
$$= 3x + 5$$

Para a eliminação de colchetes e chaves são válidas as regras acima.

Exemplos:

1

$$5x + (3x - 4) - (2x - 9) =$$
$$= 5x + 3x - 4 - 2x + 9 =$$ • Eliminando ( ).
$$= 5x + 3x - 2x - 4 + 9 =$$ • Reduzindo os termos semelhantes.
$$= 6x + 5$$

2

$$8x - [-2x + (10 + 3x - 7)] =$$
$$= 8x - [-2x + 10 + 3x - 7] =$$ • Eliminando ( ).
$$= 8x + 2x - 10 - 3x + 7 =$$ • Eliminando [ ].
$$= 8x + 2x - 3x - 10 + 7 =$$ • Reduzindo os termos semelhantes.
$$= 7x - 3$$

3

$$2a^2 + \{3a - [6a - (3a^2 + a)]\} =$$
$$= 2a^2 + \{3a - [6a - 3a^2 - a]\} =$$ • Eliminando ( ).
$$= 2a^2 + \{3a - 6a + 3a^2 + a\} =$$ • Eliminando [ ].
$$= 2a^2 + 3a - 6a + 3a^2 + a =$$ • Eliminando { }.
$$= 2a^2 + 3a^2 + 3a - 6a + a =$$ • Reduzindo os termos semelhantes.
$$= 5a^2 - 2a$$

EXERCÍCIOS

1) Reduza os termos semelhantes nas seguintes expressões algébricas:

a) $6x + (2x - 4) - 2$ *$8x - 6$*

b) $7y - 8 - (5y - 3)$ *$2y - 5$*

c) $4x - (-3x + 9 - 2x)$ *$9x - 9$*

d) $3x - (-2x + 5) - 8x + 9$ *$-3x + 4$*

e) $4x - 3 + (2x + 1)$ *$6x - 2$*

f) $(x + y) - (x + 2y)$ *$-y$*

g) $(3x - 2y) + (7x + y)$ *$10x - y$*

h) $-(8a + 4) - (3a + 2)$ *$-11a - 6$*

2) Reduza os termos semelhantes nas seguintes expressões algébricas:

a) $5a + (3a - 2) - (10a - 8)$ $-2a + 6$

b) $6x + (5x - 7) - (20 + 3x)$ $8x - 27$

c) $(x + y + z) + x - (3y + z)$ $2x - 2y$

d) $(m + 2n) - (r - 2n) - (n + r)$ $m + 3n - 2r$

e) $-(6y + 4x) + (3y - 4x) - (-2x + 3y)$ $-6x - 6y$

3) Reduza os termos semelhantes nas seguintes expressões algébricas:

a) $6x^2 - [4x^2 + (3x - 5) + x]$ $2x^2 - 4x + 5$

b) $3x + \{2y - [5x - (y + x)]\}$ $-x + 3y$

c) $-3x + [x^2 - (4x^2 - x) + 5x]$ $-3x^2 + 3x$

d) $xy - [2x + (3xy - 4x) + 7x]$ $-2xy - 5x$

e) $8a - [(a + 2m) - (3a - 3m)]$ $10a - 5m$

f) $a - (b - c) + [2a + (3b + c)]$ $3a + 2b + 2c$

g) $-[x + (7 - x) - (5 + 2x)]$ $2x - 2$

h) $\{9x - [4x - (x - y) - 5y] + y\}$ $6x + 5y$

i) $(3a + 2m) - [(a - 2m) - (6a + 2m)]$ $8a + 6m$

j) $7x^3 - \{3x^2 - x - [2x - (5x^3 - 6x^2) - 4x]\}$ $2x^3 + 3x^2 - x$

l) $2y - \{3y + [4y - (y - 2x) + 3x] - 4x\} + 2x$ $-4y + x$

m) $8y + \{4y - [6x - y - (4x - 3y) - y] - 2x\}$ $11y - 4x$

n) $4x - \{3x + [4x - 3y - (6x - 5y) - 3x] - 6y\}$ $6x + 4y$

o) $3x - \{3x - [3x - (3x - y) - y] - y\} - y$ 0

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Reduza os termos semelhantes:

a) $-2n - (n - 8) + 1$ $-3n + 9$

b) $5 - (2a - 5) + a$ $10 - a$

c) $3x + (-4 - 6x) + 9$ $-3x + 5$

d) $8y - 8 - (-3y + 5)$ $11y - 13$

e) $a - [n + (a + 3)]$ $-n-3$

f) $5 + [x - (3 - x)]$ $2x+2$

g) $x^2 - [x - (5 - x^2)]$ $-x+5$

h) $5x - y - [x - (x - y)]$ $5x-2y$

2) Reduza os termos semelhantes:

a) $2x + (2x + y) - (3x - y) + 9x$ $10x+2y$

b) $5a - \{ 5a - [5a - (5a - m) - m] - m \} - m$ 0

c) $- \{ 7a - m - [4m - (n - m + 3a) - 4a] + n \}$ $-14a+6m-2n$

d) $5xy - \{ - (2xy + 5x) + [3y - (- xy + x + 3xy)] \}$ $9xy+6x-3y$

e) $- \{ x - 2y + y - [3x + 5xy + 6y - (x - y) + 8] \}$ $x+8y+5xy+8$

TESTES

1) O monômio $7a^2b$ é semelhante ao monômio:

a) $7ab$

b) $5ab^2$

c) $7ab^2$

■ d) $5ba^2$

2) A expressão $7m - [6m - (2 + 3m)]$ é igual a:

a) $6m$

b) $-2m + 2$

■ c) $4m + 2$

d) $16m + 2$

3) A expressão $xy - [x^2 - (x^2 + xy)]$ é igual a:

a) 0

b) $2x^2 + 2xy$

c) $2x^2$

■ d) $2xy$

4) A expressão $4x^2 - [2x - (4x^2 - 2x)]$ é igual a:

a) $8x^2 - 4x$
b) $8x^2 + 4x$
c) $4x$
d) $8x^2$

5) A expressão $1 - \{x + [2x - (x^2 - 4 + 2x) + 3x^2] - 3\} + x$ é igual a:

a) $2x^2$
b) $-2x^2$
c) $2x^2 - 4x$
d) $-2x^2 + 4x$

6) A expressão $(a + b - c) + (a - b + c) - [(a + b + c) + (c - a + b)]$ é igual a:

a) $2a + 2b - 2c$
b) $2a - 2b + 2c$
c) $2a - 2b - 2c$
d) $2a + 2b + 2c$

7) A expressão $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x + 2y$ é igual a:

a) $\frac{14}{15}x + \frac{4}{3}y$

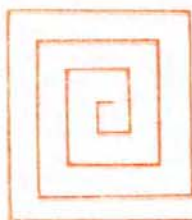
b) $\frac{14}{15}x - \frac{4}{3}y$

c) $-\frac{1}{15}x + \frac{7}{3}y$

d) $\frac{14}{15}x + \frac{7}{3}y$

8) A expressão $(3x^2 - \frac{1}{3}) - (7x^2 - \frac{4}{3})$ é igual a:

a) $4x^2 - 1$
b) $4x^2 + 1$
c) $-4x^2 - 1$
d) $-4x^2 + 1$

6

OPERAÇÕES COM MONÔMIOS

❶ Adição e Subtração

Eliminam-se os parênteses e reduzem-se os termos semelhantes.

Exemplos:

a) $(+8x)+(-5x)=+8x-5x=3x$

b) $(-7x)-(+x)=-7x-x=-8x$

c) $\left(+\frac{2}{3}a\right)-\left(-\frac{1}{2}a\right)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}a=\frac{4a+3a}{6}=\frac{7a}{6}$

EXERCÍCIOS

1) Efetue:

a) $(+7x)+(-3x)$ *$4x$*

b) $(-8x)+(+11x)$ *$3x$*

c) $(-2y)+(-3y)$ *$-5y$*

d) $(-2m)+(-m)$ *$-3m$*

e) $(+5a^2)+(-3a^2)$ *$2a^2$*

f) $(+5x)+(-5x)$ *0*

g) $(+6a)+(-4a)$ *$2a$*

h) $(-5a)+(+a)$ *$-4a$*

i) $(+8x)-(-3x)$ *$11x$*

j) $(-5x)-(-11x)$ *$6x$*

l) $(-6y)-(-y)$ *$-5y$*

m) $(+7y)-(+7y)$ *0*

n) $(-3a)-(+4a)$ *$-7a$*

o) $(-6x)-(-x)$ *$-5x$*

p) $(+2a)-(+5a)$ *$-3a$*

q) $(-m)-(-m)$ *0*

2) Efetue:

a) (+ 3 xy) – (– xy) + (xy) *5xy*

b) (+ 15 x) – (– 3 x) – (+ 7 x) + (– 2 x) *9x*

c) (– 9 y) – (+ 3 y) – (+ y) + (– 2 y) *– 15y*

d) (3 a) + (– 8 a) + (+ 4 a) – (– 5 a) – (– a) *5a*

3) Efetue:

a) $\left(+\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{3}x\right)$ $\frac{1}{6}x$

b) $\left(-\frac{2}{5}a\right)+\left(-\frac{2}{3}a\right)$ $-\frac{16}{15}a$

c) $\left(-\frac{7}{2}a\right)+\left(+\frac{1}{4}a\right)$ $-\frac{13}{4}a$

d) $\left(+2m\right)+\left(-\frac{3}{4}m\right)$ $\frac{5}{4}m$

e) $\left(+\frac{2}{3}x\right)-\left(-\frac{3}{2}x\right)$ $\frac{13}{6}x$

f) $\left(-\frac{3}{4}y\right)-\left(+\frac{1}{2}y\right)$ $-\frac{5}{4}y$

g) $\left(+\frac{2}{5}m\right)-\left(+\frac{2}{3}m\right)$ $-\frac{4}{15}m$

h) $\left(-3a\right)-\left(-\frac{2}{5}a\right)$ $-\frac{13}{5}a$

❷ Multiplicação

Vamos calcular:

$(3x^2) . (2x^5) = (3 . x . x) . (2 . x . x . x . x . x)$

$= 3 . 2 . x . x . x . x . x . x . x$

$= 6x^7$

Conclusão:

Multiplicam-se os coeficientes e as partes literais.

Exemplos:

a) $(3x^4) . (-5x^3) = -15x^7$

b) $(-4a) . (+3a) = -12a^2$

c) $(-2y^5) . (-7y) = 14y^6$

d) $(3x) . (2y) = 6xy$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $(+5x) \cdot (-4x^2)$ $-20x^3$

b) $(-2x) \cdot (+3x)$ $-6x^2$

c) $(+5a) \cdot (+4a)$ $20a^2$

d) $(-a) \cdot (+6a)$ $-6a^2$

e) $(-6x) \cdot (+3x^2)$ $-18x^3$

f) $(-2a) \cdot (5a)$ $-10a^2$

g) $(+4x^2) \cdot (+5x^3)$ $20x^5$

i) $(+2a) \cdot (-7b)$ $-14ab$

j) $(-2x) \cdot (-3y)$ $6xy$

l) $(+3x) \cdot (-5y)$ $-15xy$

m) $(-3ab) \cdot (-2a)$ $6a^2b$

n) $(+4ax) \cdot (-3x)$ $-12ax^2$

o) $(-5y) \cdot (-6xy)$ $30xy^2$

p) $(+2x) \cdot (-5xy)$ $-10x^2y$

2) Calcule:

a) $(2ab) \cdot (+4a)$ $8a^2b$

b) $(-5a^2) \cdot (+5ab^2)$ $-25a^3b^2$

c) $(-5) \cdot (+15a^2b)$ $-75a^2b$

d) $(-9x^2y) \cdot (-5xy^2)$ $45x^3y^3$

e) $(+3x^2y) \cdot (-xy)$ $-3x^3y^2$

f) $(x^2y^3) \cdot (5x^3y^2)$ $5x^5y^5$

g) $(-3x) \cdot (+2xy) \cdot (-x^3)$ $6x^5y$

h) $(-x^3) \cdot (5ax^2) \cdot (2a^3)$ $-10x^5a^4$

i) $(-ay) \cdot (-ay) \cdot (-ay)$ $-a^3y^3$

j) $(-am) \cdot (a^2m) \cdot (3m)$ $-3a^3m^3$

3) Calcule:

a) $\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \left(\frac{3}{5}x^3\right)$ $\frac{3}{10}x^4$

b) $\left(-\frac{2}{3}x\right) \cdot \left(+\frac{3}{4}y\right)$ $-\frac{1}{2}xy$

c) $\left(-\frac{1}{3}x^2\right) \cdot \left(+\frac{4}{3}x^3\right)$ $-\frac{4}{9}x^5$

d) $\left(-\frac{a^2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)$ $\frac{a^3}{6}$

e) $\left(-\frac{2x}{3}\right) \cdot \left(+\frac{6x}{5}\right)$ $-\frac{4}{5}x^2$

f) $(-10xy) \cdot \left(\frac{xy^2}{3}\right)$ $-\frac{10}{3}x^2y^3$

g) $(-5ax) \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)$ $\frac{5}{2}ax^2$

h) $\left(\frac{a^2bc}{4}\right) \cdot (-3a^2b)$ $-\frac{3}{4}a^4b^2c$

i) $(a^2c) \cdot \left(\frac{3}{4}ac\right)$ $\frac{3}{4}a^3c^2$

j) $\left(+\frac{3}{7}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}abx\right)$ $-\frac{3}{2}a^2b.$

③ Divisão

Vamos calcular:

$$(15x^6) : (5x^2) = \frac{15x^6}{5x^2}$$

$$= \frac{15 . x . x . x . x . \not{x} . \not{x}}{5 . \not{x} . \not{x}}$$

$$= 3 . x . x . x . x$$

$$= 3x^4$$

Conclusão:

> Dividem-se os coeficientes e as partes literais.

Exemplos:

a) $(21x^6) : (-7x^4) = -3x^2$

b) $(-10a^3) : (-2a^2) = +5a$

c) $(-15x^3y) : (-5xy) = +3x^2$

EXERCÍCIOS

1) Calcule os quocientes:

a) $(15x^6) : (3x^2)$ $5x^4$

b) $(16a^4) : (8a)$ $2a^3$

c) $(-30x^5) : (+3x^3)$ $-10x^2$

d) $(+8x^6) : (-2x^4)$ $-4x^2$

e) $(-10y^5) : (-2y)$ $5y^4$

f) $(-35x^7) : (+5x^3)$ $-7x^4$

g) $(+15x^8) : (-3x^2)$ $-5x^6$

h) $(-8x) : (-8x)$ 1

i) $(-14x^3) : (+2x^2)$ $-7x$

j) $(-10x^3y) : (+5x^2)$ $-2xy$

l) $(+6x^2y) : (-2xy)$ $-3x$

m) $(-7abc) : (-ab)$ $7c$

2) Calcule os quocientes:

a) $(15x^7) : (6x^5)$ $\frac{5}{2}x^2$

b) $(20a^3b^2) : (15ab^2)$ $\frac{4}{3}a^2$

c) $(+8x^3y) : (-16x^2)$ $-\frac{1}{2}xy$

d) $(-2m^5a) : (-4m^2)$ $\frac{1}{2}m^3a$

3) Calcule os quocientes:

a) $\left(+\frac{1}{3}x^3\right) : \left(-\frac{1}{5}x^2\right)$ $-\frac{5}{3}x$

b) $\left(-\frac{4}{5}x^5y\right) : \left(-\frac{4}{3}x^3y\right)$ $\frac{3}{5}x^2$

c) $(-2xy^2) : \left(\frac{xy}{4}\right)$ $-8y$

d) $\left(-\frac{4}{3}a^4b\right) : \left(+\frac{5}{2}a^2b\right)$ $-\frac{8}{15}a^2$

4 Potenciação

Vamos calcular:

$$
\begin{aligned}
(5a^3m)^2 &= (5a^3m) \cdot (5a^3m) \\
&= 5 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot m \cdot m \\
&= 25a^6m^2
\end{aligned}
$$

Conclusão:

> Para elevarmos um monômio a uma potência, elevamos cada um de seus fatores a essa potência.

Exemplos:

1. $(-7a)^2 = 49a^2$

2. $(-3x^2y)^3 = -27x^6y^3$

3. $\left(-\frac{1}{4}a^4\right)^2 = \frac{1}{16}a^8$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $(+3x^2)^2$ $9x^4$

b) $(-8x^4)^2$ $64x^8$

c) $(2x^5)^3$ $8x^{15}$

d) $(3a^2)^3$ $27a^6$

e) $(-y^2)^4$ y^8

f) $(-mn)^4$ m^4n^4

g) $(2xy^2)^4$ $16x^4y^8$

h) $(-4a^2b)^2$ $16a^4b^2$

i) $(-3a^2)^3$ $-27a^6$

j) $(-6m^3)^2$ $36m^6$

l) $(-3x^3y^4)^4$ $81x^{12}y^{16}$

m) $(-2a^2m^3)^3$ $-8a^6m^9$

2) Calcule:

a) $\left(\frac{a^2}{2}\right)^3$ $\frac{a^6}{8}$

b) $\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2$ $\frac{x^4}{16}$

c) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^2$ $\frac{1}{4}a^2$

d) $\left(+\frac{2}{3}x\right)^3$ $\frac{8}{27}x^3$

e) $\left(-\frac{3}{4}m\right)^2$ $\frac{9}{16}m^2$

f) $\left(-\frac{5}{6}m^3\right)^2$ $\frac{25}{36}m^6$

5 Raiz quadrada

Aplicando a definição de raiz quadrada, temos:

a) $\sqrt{49x^2} = 7x$, pois $(7x)^2 = 49x^2$

b) $\sqrt{25x^6} = 5x^3$, pois $(5x^3)^2 = 25x^6$

Conclusão:

Para extrair a raiz quadrada de um monômio, extraímos a raiz quadrada do coeficiente e dividimos o expoente de cada variável por 2.

Exemplos:

a) $\sqrt{16x^6} = 4x^3$ b) $\sqrt{64a^4b^2} = 8a^2b$

Observação:

Estamos admitindo que os resultados obtidos não assumam valores numéricos negativos.

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $\sqrt{4x^6}$ $2x^3$
b) $\sqrt{x^2y^4}$ xy^2
c) $\sqrt{36c^4}$ $6c^2$
d) $\sqrt{81m^2}$ $9m$
e) $\sqrt{25x^{12}}$ $5x^6$
f) $\sqrt{49m^{10}}$ $7m^5$
g) $\sqrt{9a^4b^2}$ $3a^2b$
h) $\sqrt{9x^2y^2}$ $3xy$
i) $\sqrt{16x^8}$ $4x^4$

2) Calcule:

a) $\sqrt{\frac{x^2}{49}}$ 7
b) $\sqrt{\frac{a^4}{25}}$ $\frac{a^2}{5}$
c) $\sqrt{\frac{4}{9}x^8}$ $\frac{2}{3}x^4$
d) $\sqrt{\frac{49}{64}x^{10}}$ $\frac{7}{8}x^5$
e) $\sqrt{\frac{25}{81}a^4x^6}$ $\frac{5}{9}a^2x^3$
f) $\sqrt{\frac{121}{100}a^2m^8}$ $\frac{11}{10}am^4$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Efetue:

a) $\left(+\frac{3x}{10}\right) + \left(-\frac{x}{5}\right)$ $\frac{x}{10}$
b) $\left(-\frac{1}{4}a\right) + \left(\frac{1}{2}a\right)$ $\frac{a}{4}$
c) $\left(+\frac{3x}{2}\right) - \left(+\frac{2x}{3}\right)$ $\frac{5x}{6}$
d) $(+x^2) + \left(-\frac{3}{4}x^2\right)$ $\frac{1}{4}x^2$
e) $(-3ax) - \left(-\frac{1}{5}ax\right)$ $-\frac{14}{5}ax$
f) $\left(+\frac{2a^2c}{3}\right) - (+a^2c)$ $-\frac{1}{3}a^2c$

2) Efetue:

a) $(-2a^4) \cdot (8a^7)$ $-16a^{11}$
b) $(+5a) \cdot (-2c)$ $-10ac$
c) $(+2x) \cdot (-3x^4)$ $-6x^5$
d) $(-4x^2y) \cdot (-5xy^3)$ $20x^3y^4$
e) $(-a^2c) \cdot (+ab^4c)$ $-a^3b^4c^2$
f) $(-10x^5) : (+5x^3)$ $-2x^2$
g) $(-27a^9) : (-3a^4)$ $9a^5$
h) $(+18m^7) : (-6m^5)$ $-3m^2$
i) $(-15a^3c^2) : (-5ac)$ $3a^2c$
j) $(+36x^4m^7) : (-9xm^2)$ $-4x^3m^5$

3) Efetue:

a) $\left(-\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}a\right)$ $\quad \frac{4}{15}a^3$

b) $\left(-\frac{x^2y}{3}\right)\cdot\left(-\frac{xy^2}{2}\right)$ $\quad \frac{x^3y^3}{6}$

c) $(+2m)\cdot\left(-\frac{8}{5}am\right)$ $\quad -\frac{16}{5}am^2$

d) $\left(+\frac{2}{5}x^2\right):\left(-\frac{1}{2}x\right)$ $\quad -\frac{4}{5}x$

e) $(-4xy):\left(-\frac{3x}{2}\right)$ $\quad \frac{8}{3}y$

f) $\left(-\frac{3}{4}x^7y^7\right):\left(-\frac{1}{4}x^5\right)$ $\quad 3x^2y^7$

4) Calcule:

a) $(-a^2)^3$ $\quad -a^6$
b) $(-4a^2)^2$ $\quad 16a^4$
c) $(-6ab)^0$ $\quad 1$
d) $(-7x^3y^2)^2$ $\quad 49x^6y^4$
e) $(2mn^2p^3)^3$ $\quad 8m^3n^6p^9$
f) $(-7ac^3)^2$ $\quad 49a^2c^6$
g) $(-2m^3n^2)^3$ $\quad -8m^9n^6$
h) $(5a^2c^3p^2)^3$ $\quad 125a^6c^9p^6$
i) $(-a^2xy)^4$ $\quad a^8x^4y^4$
j) $(2a^3b^2c)^5$ $\quad 32a^{15}b^{10}c^5$

5) Calcule:

a) $\left(-\frac{3c^5}{2}\right)^2$ $\quad \frac{9}{4}c^{10}$

b) $\left(-\frac{5ac}{3}\right)^3$ $\quad -\frac{125}{27}a^3c^3$

c) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^5$ $\quad -\frac{1}{32}x^{10}$

d) $\left(-\frac{abc}{5}\right)^2$ $\quad \frac{a^2b^2c^2}{25}$

e) $\left(-\frac{1}{2}r^4s^3\right)^2$ $\quad \frac{1}{4}r^8s^6$

f) $\left(\frac{1}{10}x^2yz^3\right)^3$ $\quad \frac{1}{1000}x^6y^3z^9$

6) Determine:

a) $\sqrt{a^2c^4}$ $\quad ac^2$

b) $\sqrt{\frac{m^2}{100}}$ $\quad \frac{m}{10}$

c) $\sqrt{81m^4a^6}$ $\quad 9m^2a^3$

d) $\sqrt{\frac{49}{25}a^2x^2}$ $\quad \frac{7}{5}ax$

TESTES

1) Das igualdades abaixo, a única verdadeira é:

a) $\sqrt{4a^3} = 2a$
b) $\sqrt{6a^2} = 3a$
c) $\sqrt{25a} = 5a$
■ d) $\sqrt{a^4} = a^2$

2) O resultado de $(-5mn) - (-mn)$ é:

a) $6mn$
b) $6m^2n^2$
■ c) $-4mn$
d) $-4m^2n^2$

3) O resultado de $xy \cdot (-x) \cdot (xy)$ é:

a) x^3y^2
b) $6\,xy$
c) $-x^3y^2$
d) $-3\,xy^2$

4) O resultado de $(-x) \cdot (-3x^3) \cdot (-2x^2)$ é:

a) $6\,x^5$
b) $6\,x^6$
c) $-6\,x^5$
d) $-6\,x^6$

5) O resultado de $(-21\,xy^3) : (-7\,xy^2)$ é:

a) $3\,xy$
b) $3\,x^2y^5$
c) $3\,y$
d) $-3\,y$

6) O resultado de $(x^3y^3)^2 + (2\,x^2y^2)^3$ é:

a) $9\,x^6y^6$
b) $8\,x^5y^5$
c) $3\,x^6y^6$
d) $9\,x^5y^5$

7) O resultado de $(4\,xyz)^3 : (-4\,xz)^2$ é:

a) $4\,xy^3z$
b) $8\,x^2yz$
c) $-4\,xy^3z$
d) $-8\,xy^3z$

8) O resultado de $(-2\,m^2)^3 \cdot (3\,mx^2)^2$ é:

a) $54\,m^6x^4$
b) $72\,m^6x^4$
c) $-54\,m^8x^4$
d) $-72\,m^8x^4$

9) O resultado de $(2\,xy)^2 + (-2\,y) \cdot (-3\,x) \cdot (4\,xy)$ é:

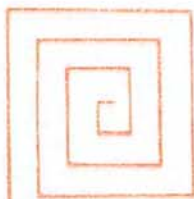
a) $28\,x^2y^2$
b) $20\,x^2y^2$
c) $-28\,x^2y^2$
d) $-20\,x^2y^2$

10) O resultado de $(4\,m^3) \cdot (2\,m)^4 - (3\,m)^2 \cdot (6\,m^5)$ é:

a) $10\,m^7$
b) $22\,m^7$
c) $-10\,m^7$
d) $-22\,m^7$

11) (PUC-SP) O produto $a^m . a^m$ é igual a:

a) a
b) a^{m-m}
c) a^{2m}
d) a^{m^2}

7

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

ADIÇÃO DE POLINÔMIOS

Vamos calcular:

$$(3x^2 - 6x + 4) + (2x^2 + 4x - 7) =$$
$$= 3x^2 - 6x + 4 + 2x^2 + 4x - 7 =$$
$$= 3x^2 + 2x^2 - 6x + 4x + 4 - 7 =$$
$$= 5x^2 - 2x - 3$$

Modo prático:

Devemos colocar os termos semelhantes um debaixo do outro. Assim:

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 4 \\ \underline{2x^2 + 4x - 7} \\ 5x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

Observe que encontramos o mesmo resultado.

EXERCÍCIOS

1) Efetue as seguintes adições de polinômios:

a) $(2x^2 - 9x + 2) + (3x^2 + 7x - 1)$ $5x^2 - 2x + 1$
b) $(5x^2 + 5x - 8) + (-2x^2 + 3x - 2)$ $3x^2 + 8x - 10$
c) $(3x - 6y + 4) + (4x + 2y - 2)$ $7x - 4y + 2$
d) $(5x^2 - 7x + 2) + (2x^2 + 7x - 1)$ $7x^2 + 1$
e) $(4x + 3y + 1) + (6x - 2y - 9)$ $10x + y - 8$
f) $(2x^3 + 5x^2 + 4x) + (2x^3 - 3x^2 + x)$ $4x^3 + 2x^2 + 5x$
g) $(5x^2 - 2ax + a^2) + (-3x^2 + 2ax - a^2)$ $2x^2$
h) $(y^2 + 3y - 5) + (-3y + 7 - 5y^2)$ $-4y^2 + 2$
i) $(x^2 - 5x + 3) + (-4x^2 - 2x)$ $-3x^2 - 7x + 3$
j) $(9x^2 - 4x - 3) + (3x^2 - 10)$ $12x^2 - 4x - 13$

2) Efetue as adições no caderno:

a)
$$\begin{array}{r} 2x^2 + 4x - 8 \\ 3x^2 + 5x + 6 \\ \hline 5x^2 + 9x - 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x - 8 \\ -5x^2 - 7x - 2 \\ \hline -3x^2 - 5x - 10 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 5 \\ x^2 + 2x - 7 \\ \hline 2x^2 + 8x - 2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} -4x^2 + 3xy + 5 \\ -x^2 - 7xy + 4 \\ \hline -5x^2 - 4xy + 9 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} x^2 + xy - 4 \\ + xy - 1 \\ \hline x^2 + 2xy - 5 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 3ab + b^2 \end{array}$$

SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

Vamos calcular:

$$(5x^2 - 4x + 9) - (8x^2 - 6x + 3) =$$
$$= 5x^2 - 4x + 9 - 8x^2 + 6x - 3 =$$
$$= 5x^2 - 8x^2 - 4x + 6x + 9 - 3 =$$
$$= -3x^2 + 2x + 6$$

Modo prático:

Devemos colocar os termos semelhantes um debaixo do outro.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x + 9 \\ -8x^2 + 6x - 3 \\ \hline -3x^2 + 2x + 6 \end{array}$$

→ **Os sinais de todos os termos foram trocados.**

EXERCÍCIOS

1) Efetue as seguintes subtrações:

a) $(5x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 7x - 1)$ $2x^2 - 11x + 8$

b) $(6x^2 - 6x + 9) - (3x^2 + 8x - 2)$ $3x^2 - 14x + 11$

c) $(7x - 4y + 2) - (2x - 2y + 5)$ $5x - 2y - 3$

d) $(4x - y - 1) - (9x + y + 3)$ $-5x - 2y - 4$

2) Efetue as seguintes subtrações:

a) $(-2a^2 - 3a + 6) - (-4a^2 - 5a + 6)$ $2a^2 + 2a$

b) $(4x^3 - 6x^2 + 3x) - (7x^3 - 6x^2 + 8x)$ $-3x^3 - 5x$

c) $(x^2 - 5x + 3) - (4x^2 + 6)$ $-3x^2 - 5x - 3$

d) $(x^2 + 2xy + y^2) - (y^2 + x^2 + 2xy)$ 0

e) $(7ab + 4c - 3a) - (5c + 4a - 10)$ $7ab - c - 7a + 10$

3) Dados os polinômios: $A = 2x^2 + 5x + 3$
$B = 4x^2 - 2x + 1$
$C = -3x^2 - x + 3$

Calcule:

a) $A + B$ $6x^2 + 3x + 4$

b) $A - B$ $-2x^2 + 7x + 2$

c) $A + C$ $-x^2 + 4x + 6$

d) $C - A$ $-5x^2 - 6x$

e) $B + C$ $x^2 - 3x + 4$

f) $B - C$ $7x^2 - x - 2$

g) $B - A$ $2x^2 - 7x - 2$

h) $C - B$ $-7x^2 + x + 2$

4) Dados os polinômios: $E = 5x^2 - 4x + 8$
$F = 7x^2 - 2x + 5$
$G = -2x^2 - 3$

Calcule:

a) $E + F - G$ $14x^2 - 6x + 16$

b) $E - F + G$ $-4x^2 - 2x$

c) $E - F - G$ $-2x + 6$

d) $G + F - E$ $2x - 6$

e) $G - E - F$ $-14x^2 + 6x - 16$

f) $G - F + E$ $-4x^2 - 2x$

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIO POR POLINÔMIO

Vamos calcular:

$$4a.(2a - 3x) = 4a.(2a) - 4a.(3x)$$
$$= 8a^2 - 12ax$$

Modo prático:

$$\begin{array}{r} 2a - 3x \\ 4a \\ \hline 8a^2 - 12ax \end{array}$$

$2a - 3x$ ⟶ polinômio
$4a$ ⟶ monômio

Conclusão:

> Multiplicamos cada termo do polinômio pelo monômio.

Exemplos:

1. $2 \cdot (x + y) = 2x + 2y$
2. $5x \cdot (a - b) = 5xa - 5xb$
3. $2x \cdot (x + y) = 2x^2 + 2xy$
4. $4a \cdot (3a^2 - 5ab) = 12a^3 - 20a^2b$

EXERCÍCIOS

1) Calcule os produtos:

a) $3 \cdot (x + y)$ $3x + 4y$

b) $2 \cdot (a - b)$ $2a - 2b$

c) $7 \cdot (x - 2y)$ $7x - 14y$

d) $2 \cdot (3a + 4b)$ $6a + 8b$

e) $x \cdot (y - 2)$ $xy - 2x$

f) $a \cdot (a - 1)$ $a^2 - a$

g) $a \cdot (a + b)$ $a^2 + ab$

h) $x^2 \cdot (x - 1)$ $x^3 - x^2$

2) Calcule os produtos:

a) $2x \cdot (x + y)$ $2x^2 + 2xy$

b) $3x \cdot (x - 2y)$ $3x^2 - 6xy$

c) $4x \cdot (a + b)$ $4xa + 4xb$

d) $x^2 \cdot (x^3 + x^4)$ $x^5 + x^6$

e) $a^2 \cdot (m + a^3)$ $a^2m + a^5$

f) $x \cdot (4x^2 + 5)$ $4x^3 + 5x$

g) $6x \cdot (x - 3)$ $6x^2 - 18x$

h) $5a \cdot (2a - 3)$ $10a^2 - 15a$

i) $-2a \cdot (a^3 - 4a)$ $-2a^4 + 8a^2$

j) $2x \cdot (x^2 - 2x + 5)$ $2x^3 - 4x^2 + 10x$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIO POR POLINÔMIO

Vamos calcular o produto, usando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$\begin{aligned}(3x + 5) . (x + 2) &= 3x . (x + 2) + 5 (x + 2)\\ &= 3x^2 + 6x + 5x + 10\\ &= 3x^2 + 11x + 10\end{aligned}$$

Podemos também utilizar este **dispositivo prático:**

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & +5x & \\ & +6x & +10 \\ \hline 3x^2 & +11x & +10 \end{array}$$

Conclusão:

> Multiplicamos cada termo de um polinômio por todos os termos do outro polinômio e a seguir reduzimos os termos semelhantes.

Exemplos:

1 Calcular $(2x + 3) . (4x - 5)$

$$\begin{array}{rrr} 2x & +3 & \\ 4x & -5 & \\ \hline 8x^2 & +12x & \\ & -10x & -15 \\ \hline 8x^2 & +2x & -15 \end{array}$$

2 Calcular $(3x - 1) . (2x - 2)$

$$\begin{array}{rrr} 3x & -1 & \\ 2x & -2 & \\ \hline 6x^2 & -2x & \\ & -6x & +2 \\ \hline 6x^2 & -8x & +2 \end{array}$$

EXERCÍCIOS

1) Calcule os produtos:

a) $(x + 5) . (x + 2)$ $x^2 + 7x + 10$
b) $(3x + 2) . (2x + 1)$ $6x^2 + 7x + 2$
c) $(x + 7) . (x - 4)$ $x^2 + 3x - 28$
d) $(3x + 4) . (2x - 1)$ $6x^2 + 5x - 4$
e) $(x - 4y) . (x - y)$ $x^2 - 5xy + 4y^2$
f) $(5x - 2) . (2x - 1)$ $10x^2 - 9x + 2$
g) $(3x + 1) . (3x - 1)$ $9x^2 - 1$
h) $(2x + 5) . (2x - 5)$ $4x^2 - 25$

2) Calcule os produtos:

a) $(x + y) . (x - y)$ $x^2 - y^2$
b) $(a^2 - 3) . (a^2 + 3)$ $a^4 - 9$
c) $(10 + x) . (10 - x)$ $100 - x^2$
d) $(6x^2 - 4) . (6x^2 + 4)$ $36x^4 - 16$
e) $(x^2 + 2) . (x^2 + 6)$ $x^4 + 8x^2 + 12$
f) $(m^4 - 1) . (m^4 - 5)$ $m^8 - 6m^4 + 5$
g) $(x^3 - 2) . (x^3 + 8)$ $x^6 + 6x^3 - 16$
h) $(ab - 2y) . (ab + 2y)$ $a^2b^2 - 4y^2$

3) Calcule os produtos:

a) $(3x^2 - 4x - 3) . (x + 1)$ $3x^3 - x^2 - 7x - 3$
b) $(x^2 - x - 1) . (x + 1)$ $x^3 - 2x - 1$
c) $(x^2 - 3x - 2) . (x - 2)$ $x^3 - 5x^2 + 4x + 4$
d) $(x^2 + 5x - 6) . (2x + 1)$ $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
e) $(x^2 + x + 1) . (x - 3)$ $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
f) $(a^3 - a^2 + a - 1) . (a + 1)$ $a^4 - 1$

4) Calcule os produtos:

a) $(x - 1) . (x - 2) . (x - 3)$ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
b) $(x + 2) . (x - 1) . (x + 3)$ $x^3 + 4x^2 + x - 6$
c) $(x + 1) . (x + 3) . (x - 1)$ $x^3 + 3x^2 - x - 3$
d) $(2 - a) . (1 + a) . (3 - 2a)$ $6 - a - 5a^2 + 2a^3$

5) Dados os polinômios: $A = x - 2$; $C = x + 1$
$B = x - 3$; $D = x + 5$

Calcule os seguintes produtos:

a) $A . B$ $x^2 - 5x + 6$
b) $B . C$ $x^2 - 2x - 3$
c) $A . B . C$ $x^3 - 4x^2 + x + 6$
d) $B . C . D$ $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

DIVISÃO DE UM POLINÔMIO POR UM MONÔMIO

Vamos efetuar as divisões:

a) $(8x^5 - 6x^4) : (+2x) = \frac{8x^5}{2x} - \frac{6x^4}{2x}$

$= 4x^4 - 3x^3$

b) $(15x^3 - 4x^2) : (-5x) = -\frac{15x^3}{5x} + \frac{4x^2}{5x}$

$= -3x^2 + \frac{4x}{5}$

Conclusão:

> Dividimos cada termo do polinômio pelo monômio.

EXERCÍCIOS

1) Efetue as divisões:

a) $(12x^2 - 8x) : (+2x)$ $6x - 4$

b) $(3y^3 + 6y^2) : (3y)$ $y^2 + 2y$

c) $(10x^2 + 6x) : (-2x)$ $-5x - 3$

d) $(4x^3 - 9x) : (+3x)$ $\frac{4x^2}{3} - 3$

e) $(15x^3 - 10x^2) : (+5x^2)$ $3x - 2$

f) $(30x^2 - 20xy) : (-10x)$ $-3x + 2y$

g) $(-18x^2 + 8x) : (+2x)$ $-9x + 4$

h) $(6a^2x - 4ax^2) : (-2x)$ $-3a^2 + 2ax$

2) Efetue as divisões:

a) $(x^3 + 2x^2 + x) : (+x)$ $x^2 + 2x + 1$

b) $(a^2 + a^3 + a^4) : (+a^2)$ $1 + a + a^2$

c) $(3x^4 - 6x^3 + 10x^2) : (-2x^2)$ $-\frac{3}{2}x^2 + 3x - 5$

d) $(x^7 + x^5 + x^3) : (-x^2)$ $-x^5 - x^3 - x$

e) $(3x^2y - 18xy^2) : (+3xy)$ $x - 6y$

f) $(7x^3y - 8x^2y^2) : (-2xy)$ $-\frac{7}{2}x^2 + 4xy$

g) $(4x^2y + 2xy - 6xy^2) : (-2xy)$ $-2x - 1 + 3y$

h) $(20x^{12} - 16x^8 - 8x^5) : (+4x^4)$ $5x^8 - 4x^4 - 2x$

i) $(3xy^4 + 9x^2y - 12xy^2) : (+3xy)$ $y^3 + 3x - 4y$

DIVISÃO DE POLINÔMIO POR POLINÔMIO

Explicaremos como se efetua a divisão de polinômios pelo método da chave, por meio de exemplos.

Exemplo 1

Vamos efetuar a divisão:

$$(2x^2 - 5x - 12) : (x - 4)$$

Observe que os polinômios estão ordenados segundo as potências decrescentes de x.

a) Coloque os polinômios assim:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 12 & x - 4 \\ \hline \end{array}$$

b) Divida o primeiro termo do dividendo ($2x^2$) pelo primeiro termo do divisor (x) e obtenha o primeiro termo do quociente (2x):

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 12 & x - 4 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

c) Multiplique o primeiro termo do quociente (2x) pelos termos do divisor, colocando os produtos com **sinais trocados** embaixo dos termos semelhantes do dividendo. A seguir, reduza os termos semelhantes:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 12 & x - 4 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 8x & 2x \\ \cline{1-1} +3x & \end{array}$$

d) Repetimos as passagens anteriores.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 12 & x - 4 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 8x & 2x + 3 \longrightarrow \text{Quociente} \\ \cline{1-1} +3x - 12 & \\ -3x + 12 & \\ \cline{1-1} 0 \longrightarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Exemplo 2

Vamos efetuar a divisão:

$$(6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 18x - 7) : (2x^2 - 3x + 1)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -11x^3 & -6x^2 & +18x & -7 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -3x^2 & & & 3x^2 - x - 6 \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & -9x^2 & +18x & & \\
 & +2x^3 & -3x^2 & +1x & & \\ \cline{2-4}
 & & -12x^2 & +19x & -7 & \\
 & & +12x^2 & -18x & +6 & \\ \cline{3-5}
 & & + & x & -1 &
\end{array}$$

Terminamos a divisão, pois o grau de $x - 1$ (resto) é inferior ao de $2x^2 - 3x + 1$ (divisor).

Logo: **Quociente**: $3x^2 - x - 6$
Resto: $x - 1$

EXERCÍCIOS

1) Calcule os quocientes:

a) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 2)$ *$x + 3$*
b) $(x^2 - 7x + 10) : (x - 2)$ *$x - 5$*
c) $(2x^2 + 6x + 4) : (x + 1)$ *$2x + 4$*
d) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 3)$ *$x^2 - 3x + 2$*
e) $(7x^3 + 27x^2 - 3x + 4) : (x + 4)$ *$7x^2 - x + 1$*
f) $(2x^3 + 3x^2 - x - 2) : (2x - 3)$ *$x^2 + 3x + 4$; resto = 10*
g) $(x^3 - 6x^2 + 7x + 4) : (x^2 - 2x - 1)$ *$x - 4$*
h) $(3x^3 - 13x^2 + 37x - 50) : (x^2 - 2x + 5)$ *$3x - 7$; resto = $8x - 15$*
i) $(10x^3 - 31x^2 + 26x - 3) : (5x^2 - 8x + 1)$ *$2x - 3$*
j) $(4x^4 - 14x^3 + 15x^2 - 17x + 5) : (x^2 - 3x + 1)$ *$4x^2 - 2x + 5$*

2) Calcule os quocientes (quando o polinômio dividendo é incompleto, você deve escrevê-lo na forma geral):

a) $(x^4 - 2x^3 + 3) : (x - 1)$ *$x^3 - x^2 - x - 1$; resto = 2*

b) $(m^3 + 1) : (m - 1)$ *$m^2 + m + 1$; resto = 2*

c) $(x^3 - 27) : (x - 3)$ *$x^2 + 3x + 9$*

d) $(8x^3 + 27) : (2x + 3)$ *$4x^2 - 6x + 9$*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Reduza os termos semelhantes nas expressões:

a) $4x - 2(3 + 2x)$ *-6*

b) $5m - 3(2m - 1)$ *$-m + 3$*

c) $xy + 3(xy - 5x) + 8x$ *$4xy - 7x$*

d) $3y - 5(-1 + 2y) - 10$ *$-7y - 5$*

e) $5x^2 + 2(x^2 - 6)$ *$7x^2 - 12$*

f) $2(x - 1) + 3(2x - 2)$ *$8x - 8$*

g) $5(x - 10) - 2(x - 4)$ *$3x - 42$*

h) $3(2x - 1) - 2(4 - x)$ *$8x - 11$*

2) Reduza os termos semelhantes nas expressões:

a) $(x^2 - 2x + 10) + 6(3x^2 + x + 2)$ *$19x^2 + 4x + 22$*

b) $(8x^2 - 2x + 6) - 2(2x^2 - x + 3)$ *$4x^2$*

c) $3(2x^2 - 1 - 5x) + 7(-5 + x^2 - 2x)$ *$13x^2 - 29x - 38$*

3) Reduza os termos semelhantes nas expressões:

a) $8(x - 2) + 7(x - 5) - 9x$ *$6x - 51$*

b) $(3x - 4) - 5x + 2(3x - 6)$ *$4x - 16$*

c) $10x + (x - 4) - 4(2x + 1)$ *$3x - 8$*

d) $2x^3 - (x^2 - x^3) - 2(x^2 - 3) + x^3$ *$4x^3 - 3x^2 + 6$*

4) Reduza os termos semelhantes nas expressões:

a) $x^2(2x^2) - x(x^2) - 7x^3$ *$2x^4 - 8x^3$*

b) $x(4x^2) - x(-3x^2) + 10x^3$ *$17x^3$*

c) $m(2 - m) + 4m^2 - 7$ *$2m + 3m^2 - 7$*

d) $3r(2r^2) + r^3 - 6r + 2r^3$ *$9r^3 - 6r$*

5) Reduza os termos semelhantes nas expressões:

a) $x(x-2)+3x(2x+5)$ $7x^2+13x$

b) $7x^2-3x^2(x-6)-10$ $25x^2-3x^3-10$

c) $x(x+3)+x(x+1)$ $2x^2+4x$

d) $a(a-b)+(-ab)+(-ab)$ a^2-3ab

e) $x(x+3y)-2(x^2-6y)+2$ $-x^2+3xy+12y+2$

f) $ab(a-b)+5a^2b-3ab^2$ $6a^2b-4ab^2$

6) Calcule os produtos e reduza os termos semelhantes:

a) $x^2+(x+7).(x+1)$ $2x^2+8x+7$

b) $5x+(x+4).(x-2)$ x^2+7x-8

c) $-2x^2+5+2(x+2).(x+2)$ $8x+13$

d) $5x^2-1+(x+7).(x-7)$ $6x^2-50$

e) $4x+3+(2x+5).(5x-2)$ $10x^2+25x-7$

f) $(6x^2-5).(6x^2+5)-10$ $36x^4-35$

g) $3a^2+(a+5).(a-2)+a-1$ $4a^2+4a-11$

h) $x+(x+3).(x+4)-3x+1$ $x^2+5x+13$

7) Calcule os produtos e reduza os termos semelhantes:

a) $(x+5).(x-2)+(2x-1).(x+1)$ $3x^2+4x-11$

b) $(2x-3).(3x-1)-(6x-1).(x+2)$ $-22x+5$

8) Reduza os termos semelhantes nas expressões:

a) $2x(2y+x)-3y(2x-y)+xy(2-y)$ $2x^2+3y^2-xy^2$

b) $8x^3-2x[y-2x(y-2x)-y]$ $4x^2y$

c) $\frac{1}{7}(105x^2-63x-84)-(120x^2-72x-96)$ $-105x^2+63x+84$

9) (GV-SP) Determine o quociente da divisão do polinômio

x^3-3x^2+x+2 por $-x^2+x+1$. $Q=-x+2$

10) (MAPOFEI-SP) Mostre que x^4+2x^3+x+2 é divisível por x^2+3x+2.

$(x^4+2x^3+0x^2+x+2):(x^2+3x+2)=x^2-x+1$

TESTES

1) O resultado de $-3a \cdot (-2a - 4)$ é:

a) $6a^2 - 12a$

■ b) $6a^2 + 12a$

c) $-5a + 4$

d) $-5a - 4$

2) Certo aluno, ao efetuar a divisão $(20x^3 - 8x) : (-4x)$, cometeu um erro e deu a seguinte resposta: $-5x + 2$. O erro está:

a) no coeficiente do 1º termo

■ b) no expoente do 1º termo

c) no sinal do 1º termo

d) no sinal do 2º termo

3) Se $A = x^3 - 6$ e $B = x^3 + 6$, então $A + B$ é igual a:

■ a) $2x^3$

b) $2x^6$

c) $2x^3 + 12$

d) $2x^6 - 12$

4) Numa adição de polinômios encontrou-se $7x^2 + 10x - 8$, mas verificou-se que a parcela $2x^2 + 7x + 2$ havia sido incluída indevidamente. O resultado correto da adição é:

■ a) $5x^2 + 3x - 10$

b) $5x^2 + 3x - 6$

c) $9x^2 + 17x - 6$

d) $9x^2 + 17x - 10$

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 10x - 8 \\ -\ 2x^2 - \ 7x - 2 \\ \hline 5x^2 + 3x - 10 \end{array}$$

5) Sendo $B = 3x^2 + 2x + 3$ e $A - B = x^2 - 9x - 1$, então A é o polinômio:

a) $4x^2 - 7x + 4$

b) $-2x^2 - 11x + 2$

■ c) $4x^2 - 7x + 2$

d) $4x^2 + 11x + 2$

$A - (3x^2 + 2x + 3) = x^2 - 9x - 1$

$A = 4x^2 - 7x + 2$

6) O produto $(5x^3 - 2) . (2x^2 - 7)$ é um polinômio cujo termo do quinto grau é:

a) $3x^5$
b) $7x^5$
■ c) $10x^5$
d) $14x^5$

7) Se $A = 3x + 4y$ e $B = 5x - 3y$, então $2B - A$ é igual a:

a) $7x + 10y$
■ b) $7x - 10y$
c) $2x + y$
d) $2x - 7y$

8) O produto $(x^2 - x + 1) . (x + 1)$ tem como resultado:

■ a) $x^3 + 1$
b) $x^3 - 1$
c) $x^3 + 2x^2 + 1$
d) $x^3 - 2x^2 + 1$

9) (UEL-PR) Sejam m e n os polinômios $m = x^2 - x$ e $n = x - 1$. O quociente de m por n é:

a) 0
b) 1
■ c) x
d) $x - 1$

10) Sendo: $A = 6x^2 - 11x - 11$
$B = 3x + 2$

Então, o quociente de A por B e o resto da divisão são, respectivamente:

a) $2x - 5$ e 1
b) $2x - 5$ e 2
■ c) $2x - 5$ e -1
d) $2x - 5$ e -2

11) Simplifique a expressão $3[2(x + y) - 4(x - y)]$. O resultado é:

■ a) $-6x + 18y$
b) $18x + 18y$
c) $6x + 6y$
d) $-18x + 18y$

12) Simplifique a expressão $a [b (c - 4) + 5] - abc$. O resultado é:

a) $2abc - 4b$

■ b) $5a - 4ab$

c) $5a - 4b$

d) $2abc + 5a$

13) Simplifique a expressão $20 - (3x + 2) . (3x - 5)$. O resultado é:

a) $9x^2 - 9x - 10$

b) $9x^2 + 9x + 30$

c) $- 9x^2 + 9x - 10$

■ d) $- 9x^2 + 9x + 30$

14) Simplifique a expressão $(2x - 5) . (4x + 1) + 18x + 5$. O resultado é:

a) $8x^2 - 36x - 10$

b) $8x^2 - 36x + 10$

c) $8x^2 - 10$

■ d) $8x^2$

15) A expressão $\frac{1}{5} (15x - 35y - 10) - \frac{1}{3} (45 - 12y - 6x)$ é igual a:

a) $x - 3y - 17$

■ b) $5x - 3y - 17$

c) $5x + 3y + 17$

d) $5x - 3y + 17$

16) A expressão $x (2x - y) - 2y (x - y) + xy (x + 3)$ é igual a:

a) $2x^2 + 2xy + x^2y + 2y^2$

b) $2x^2 + 4xy + x^2y + 2y^2$

c) $2x^2 + 2x^2y + y^2$

■ d) $2x^2 + x^2y + 2y^2$

17) (OSEC-SP) O resto da divisão de $3x^2 - 5x + 4$ por $x + 2$ é:

a) 0

b) 15

c) 20

■ d) 26

18) (UF-AL) O resto da divisão de $x^4 - 3x^2 - 1$ por $x - 2$ é:

a) 1

b) 2

■ c) 3

d) 4

19) (GV-SP) O quociente da divisão do polinômio
$x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $-x^2 + x + 1$ é:

a) $x - 2$

b) $x + 1$

■ c) $-x + 2$

d) $-x - 1$

20) (UF-BA) O polinômio que, dividido por $2x + 3$, tem quociente $(x - 1)$ e resto 6 é:

■ a) $2x^2 + x + 3$ $\quad P = (2x + 3)(x - 1) + 6 = 2x^2 + x + 3$

b) $2x^2 + x - 3$

c) $2x^2 + 5x + 3$

d) $2x^2 + 5x + 9$

21) (MACK-SP) O polinômio que dividido por $(x + 5)$ tem por quociente $(x - 2)$ e resto 3 é:

■ a) $x^2 + 3x - 7$ $\quad P = (x + 5)(x - 2) + 3 = x^2 + 3x - 7$

b) $x^2 + 3x + 7$

c) $x^2 - 3x - 7$

d) $x^2 + 3x - 13$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Há certos produtos que ocorrem freqüentemente no cálculo algébrico e que são chamados **produtos notáveis**. Vamos apresentar aqueles cujo emprego é mais freqüente.

1) QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Observe:

$$(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Modo prático:

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{\quad + ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Conclusão:

(Primeiro termo + Segundo termo)^2 =

$$= \boxed{\begin{pmatrix}\text{Primeiro}\\ \text{termo}\end{pmatrix}^2 + 2 . \begin{pmatrix}\text{Primeiro}\\ \text{termo}\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}\text{Segundo}\\ \text{termo}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Segundo}\\ \text{termo}\end{pmatrix}^2}$$

Exemplos:

❶ $(5 + x)^2 = 5^2 + 2 . 5 . x + x^2$
$= 25 + 10x + x^2$

❷ $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 . (2x) . (3y) + (3y)^2$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $(3 + x)^2$ $9 + 6x + x^2$

b) $(x + 5)^2$ $x^2 + 10x + 25$

c) $(x + y)^2$ $x^2 + 2xy + y^2$

d) $(x + 2)^2$ $x^2 + 4x + 4$

e) $(3x + 2)^2$ $9x^2 + 12x + 4$

f) $(2x + 1)^2$ $4x^2 + 4x + 1$

g) $(5 + 3a)^2$ $25 + 30a + 9a^2$

h) $(2a + x)^2$ $4a^2 + 4ax + x^2$

2) Calcule:

a) $(r + 4s)^2$ $r^2 + 8rs + 16s^2$

b) $(10x + y)^2$ $100x^2 + 20xy + y^2$

c) $(3y + 3a)^2$ $9y^2 + 18ay + 9a^2$

d) $(-5 + n)^2$ $25 - 10n + n^2$

e) $(-3x + 5)^2$ $9x^2 - 30x + 25$

f) $(a + ab)^2$ $a^2 + 2a^2b + a^2b^2$

g) $(2x + xy)^2$ $4x^2 + 4x^2y + x^2y^2$

h) $(x + 0{,}5)^2$ $x^2 + x + 0{,}25$

3) Calcule:

a) $(a^2 + 1)^2$ $a^4 + 2a^2 + 1$

b) $(y^5 + 3)^2$ $y^{10} + 6y^5 + 9$

c) $(y^5 + 1)^2$ $y^{10} + 2y^5 + 1$

d) $(4x^2 + 7)^2$ $16x^4 + 56x^2 + 49$

e) $(2x^3 + 3y^2)^2$ $4x^6 + 12x^3y^2 + 9y^4$

f) $(a^2 + b^2)^2$ $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

g) $(x + 2y^3)^2$ $x^2 + 4xy^3 + 4y^6$

h) $(mn^2 + 4)^2$ $m^2n^4 + 8mn^2 + 16$

i) $(xy + z^3)^2$ $x^2y^2 + 2xyz^3 + z^6$

j) $(x^2y + xy^2)^2$ $x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4$

4) Calcule:

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $x^2 + x + \frac{1}{4}$

b) $\left(a + \frac{2}{3}\right)^2$ $a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{4}{9}$

c) $\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2$ $a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}$

d) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$ $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

e) $\left(\frac{m}{2} + 3\right)^2$ $\frac{m^2}{4} + 3m + 9$

f) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$ $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}$

2) QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Observe:

$$(a - b)^2 = (a - b) . (a - b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Modo prático:

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Conclusão:

$(\text{Primeiro termo} - \text{Segundo termo})^2 =$

$$= \boxed{\left(\begin{matrix}\text{Primeiro}\\\text{termo}\end{matrix}\right)^2 - 2 . \left(\begin{matrix}\text{Primeiro}\\\text{termo}\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}\text{Segundo}\\\text{termo}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{Segundo}\\\text{termo}\end{matrix}\right)^2}$$

Exemplos:

❶ $(3 - x)^2 = 3^2 - 2 . 3 . x + x^2$
$= 9 - 6x + x^2$

❷ $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 . (2x) . (3y) + (3y)^2$
$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $(5 - x)^2$ *$25 - 10x + x^2$*

b) $(y - 3)^2$ *$y^2 - 6y + 9$*

c) $(x - y)^2$ *$x^2 - 2xy + y^2$*

d) $(x - 7)^2$ *$x^2 - 14x + 49$*

e) $(2x - 5)^2$ *$4x^2 - 20x + 25$*

f) $(6y - 4)^2$ *$36y^2 - 48y + 16$*

g) $(3x - 2y)^2$ *$9x^2 - 12xy + 4y^2$*

h) $(2a - b)^2$ *$4a^2 - 4ab + b^2$*

2) Calcule:

a) $(5a^2-1)^2$ $25a^4-10a^2+1$

b) $(x^2-1)^2$ x^4-2x^2+1

c) $(9x^2-1)^2$ $81x^4-18x^2+1$

d) $(x^3-2)^2$ x^6-4x^3+4

e) $(2m^5-3)^2$ $4m^{10}-12m^5+9$

f) $(x-5y^3)^2$ $x^2-10xy^3+25y^6$

g) $(a^2-b^2)^2$ $a^4-2a^2b^2+b^4$

h) $(1-mx)^2$ $1-2mx+m^2x^2$

i) $(2-x^5)^2$ $4-4x^5+x^{10}$

j) $(-3x-5)^2$ $9x^2+30x+25$

l) $(x-0{,}5)^2$ $x^2-x+0{,}25$

m) $(a^3-m^3)^2$ $a^6-2a^3m^3+m^6$

n) $(-a-c)^2$ $a^2+2ac+c^2$

o) $(2n^4-1)^2$ $4n^8-4n^4+1$

3) Calcule:

a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $x^2-x+\frac{1}{4}$

b) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$

c) $\left(y^2-\frac{1}{4}\right)^2$ $y^4-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{16}$

d) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2$ $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}$

3) PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Observe:

$$(a+b)\,.\,(a-b) = a^2-ab+ab+b^2$$
$$= a^2-b^2$$

Modo prático:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad\;\; - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad\;\; - b^2 \end{array}$$

Conclusão:

(Primeiro termo + Segundo termo) . (Primeiro termo – Segundo termo) =

$$= \left(\text{Primeiro termo}\right)^2 - \left(\text{Segundo termo}\right)^2$$

Exemplos:

❶ $(x+5)\,.\,(x-5) = x^2-5^2$
$= x^2-25$

❷ $(3x+7y)\,.\,(3x-7y) = (3x)^2-(7y)^2$
$= 9x^2-49y^2$

EXERCÍCIOS

1) Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos:

a) $(x + y).(x - y)$ $x^2 - y^2$
b) $(y - 7).(y + 7)$ $y^2 - 49$
c) $(x + 3).(x - 3)$ $x^2 - 9$
d) $(2x + 5).(2x - 5)$ $4x^2 - 25$
e) $(3x - 2).(3x + 2)$ $9x^2 - 4$
f) $(5x + 4).(5x - 4)$ $25x^2 - 16$
g) $(3x + y).(3x - y)$ $9x^2 - y^2$
h) $(1 - 5x).(1 + 5x)$ $1 - 25x^2$
i) $(2x + 3y).(2x - 3y)$ $4x^2 - 9y^2$
j) $(7 - 6x).(7 + 6x)$ $49 - 36x^2$

2) Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos:

a) $(1 + 7x^2).(1 - 7x^2)$ $1 - 49x^4$
b) $(3x^2 - 4).(3x^2 + 4)$ $9x^4 - 16$
c) $(a^3 - 1).(a^3 + 1)$ $a^6 - 1$
d) $(a + xy).(a - xy)$ $a^2 - x^2y^2$
e) $(a^2 - b^3).(a^2 + b^3)$ $a^4 - b^6$
f) $(3x^2 - y^2).(3x^2 + y^2)$ $9x^4 - y^4$
g) $(0,5 + x).(0,5 - x)$ $0,25 - x^2$
h) $(t^3 + 3).(t^3 - 3)$ $t^6 - 9$
i) $(2x^3 + 2a).(2x^3 - 2a)$ $4x^6 - 4a^2$
j) $(-3a + 4n^2).(-3a - 4n^2)$ $9a^2 - 16n^4$
l) $(a^2c + d^2).(a^2c - d^2)$ $a^4c^2 - d^4$
m) $(mn - 7).(mn + 7)$ $m^2n^2 - 49$

3) Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos:

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right).\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $x^2 - \frac{1}{4}$
b) $\left(x - \frac{2}{3}\right).\left(x + \frac{2}{3}\right)$ $x^2 - \frac{4}{9}$
c) $\left(y + \frac{6}{7}\right).\left(y - \frac{6}{7}\right)$ $y^2 - \frac{36}{49}$
d) $\left(1 + \frac{x}{3}\right).\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ $1 - \frac{x^2}{9}$
e) $\left(\frac{x}{5} - 1\right).\left(\frac{x}{5} + 1\right)$ $\frac{x^2}{25} - 1$
f) $\left(x^2 - \frac{1}{7}\right).\left(x^2 + \frac{1}{7}\right)$ $x^4 - \frac{1}{49}$

4) Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos:

a) $\left(\frac{x}{4} + \frac{2}{3}\right).\left(\frac{x}{4} - \frac{2}{3}\right)$ $\frac{x^2}{16} - \frac{4}{9}$
b) $\left(3 + \frac{2x}{7}\right).\left(3 - \frac{2x}{7}\right)$ $9 - \frac{4x^2}{49}$
c) $\left(\frac{3x}{4} - \frac{a}{5}\right).\left(\frac{3x}{4} + \frac{a}{5}\right)$ $\frac{9x^2}{16} - \frac{a^2}{25}$

4) CUBO DA SOMA OU DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Observe: $(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2$
$= (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Observe: $(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b)^2$
$= (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$
$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemplos:

❶ $(x + 5)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 5^2 + 5^3$
$= x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

❷ $(2x - y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 - y^3$
$= 8x^3 - 3 \cdot (4x^2) \cdot y + 6xy^2 - y^3$
$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

EXERCÍCIOS

1) Desenvolva:

a) $(x + y)^3$ $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
b) $(x - y)^3$ $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
c) $(m + 3)^3$ $m^3 + 9m^2 + 27m + 27$
d) $(a - 1)^3$ $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$
e) $(5 - x)^3$ $125 - 75x + 15x^2 - x^3$
f) $(-a - b)^3$ $-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$

2) Desenvolva:

a) $(x + 2y)^3$ $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
b) $(2x - y)^3$ $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
c) $(1 + 2y)^3$ $1 + 6y + 12y^2 + 8y^3$
d) $(x - 2a)^3$ $x^3 - 6x^2a + 12xa^2 - 8a^3$
e) $(1 - pq)^3$ $1 - 3pq + 3p^2q^2 - p^3q^3$
f) $(3x^2 - 1)^3$ $27x^6 - 27x^4 + 9x^2 - 1$

RESUMO

Aconselhamos você a memorizar as igualdades ❶, ❷ e ❸, pois são bastante utilizadas no cálculo algébrico.

❶ **Quadrado de um binômio.**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

❷ **Produto da soma pela diferença.**

$$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$$

❸ **Cubo de um binômio.**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Efetue:

a) $(5a + 7)^2$ $25a^2 + 70a + 49$
b) $(2n - 1)^2$ $4n^2 - 4n + 1$
c) $(7x - a)^2$ $49x^2 - 14xa + a^2$
d) $(4x + 9)^2$ $16x^2 + 72x + 81$
e) $(3x + 2y)^2$ $9x^2 + 12xy + 4y^2$
$9a^4 + 6a^2 + 1$

g) $(2x^3 - 5)^2$ $4x^6 - 20x^3 + 25$
h) $(8x - 7a)^2$ $64x^2 - 112ax + 49a^2$
i) $(6 - a^3)^2$ $36 - 12a^3 + a^6$
j) $(3a^2 + 1)^2$ $9a^4 + 6a^2 + 1$
l) $(10p + 3q)^2$ $100p^2 + 60pq + 9q^2$
m) $(1 + pq)^2$ $1 + 2pq + p^2q^2$

2) Efetue:

a) $(1 + x) . (1 - x)$ $1 - x^2$
b) $(a - 3m) . (a + 3m)$ $a^2 - 9m^2$
c) $(r + 3s) . (r - 3s)$ $r^2 - 9s^2$
d) $(a^2 - 8) . (a^2 + 8)$ $a^4 - 64$

e) $(2x^3 - 1) . (2x^3 + 1)$ $4x^6 - 1$
f) $(m^3 - 8) . (m^3 + 8)$ $m^6 - 64$
g) $(3xy + z) . (3xy - z)$ $9x^2y^2 - z^2$
h) $(a^2b^4 - 1) . (a^2b^4 + 1)$ $a^4b^8 - 1$

3) Desenvolva:

a) $(x-1)^3$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b) $(x+2)^3$ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

c) $(2x-1)^3$ $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

d) $(2x+5)^3$ $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

e) $(3x-2)^3$ $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

f) $(x^2 - 3m)^3$ $x^6 - 9x^4m + 27x^2m^2 - 27m^3$

4) Desenvolva e reduza:

a) $(x-5)^2 - 10x$ $x^2 - 20x + 25$

b) $(5x-2)^2 + 3x - 1$ $25x^2 - 17x + 3$

c) $(x+1)^2 - (x-1)^2$ $4x$

d) $(x+3)^2 + (x-3)^2$ $2x^2 + 18$

e) $(7x+5)^2 - (7x-5)^2$ $140x$

f) $(3x-1) . (3x+1) - 1$ $9x^2 - 2$

5) Desenvolva e reduza:

a) $(2x-3)^2 - 4(x-1) . (x+1) + 5$ $-12x + 18$

b) $(5x+2)^2 - (5x-2)^2 - (5x+2) . (5x-2)$ $-25x^2 + 40x + 4$

c) $(1+x)^2 + (1-x)^2 + (-1+x)^2 + (-1-x)^2$ $4x^2 + 4$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right) . \left(x - \frac{1}{2}\right) - (1-x)^2$ $2x - \frac{5}{4}$

TESTES

1) Sejam as afirmações:

I) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ (F)

II) $(a+b) . (a-b) = a^2 - b^2$ (V)

III) $(a+b)^2 - 2b^2 = a^2 - b^2$ (F)

Quantas são verdadeiras?

a) 0

■ b) 1

c) 2

d) 3

2) A expressão $(-x-y)^2$ é igual a:

a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $-x^2 - 2xy - y^2$
c) $x^2 + y^2$
d) $x^2 - y^2$

3) A expressão $(2x^3 - 3x^2) . (2x^3 + 3x^2)$ é igual a:

a) $4x^9 - 9x^4$
b) $4x^6 - 9x^4$
c) $4x^9 + 9x^4$
d) $4x^6 + 9x^4$

4) (CESCEM-SP) O desenvolvimento de $(2a - 3b)^2$ é:

a) $2a^2 - 3b^2$
b) $4a^2 + 9b^2$
c) $4a^2 - 12ab + 9b^2$
d) $2a^2 - 12ab + 3b^2$

5) A expressão $(xy + xz)^2$ é igual a:

a) $x^2y^2 + 2x^2yz + y^2z^2$
b) $x^2y^2 + 2x^2yz + x^2z^2$
c) $x^2y^2 + 2x^2yz + xz^2$
d) $x^2y^2 + 2x^4y^2z^2 + x^2z^2$

6) A expressão $x^2 - (x-7)^2$ é igual a:

a) $14x - 49$
b) $49 - 14x$
c) $2x^2 + 14x - 49$
d) $2x^2 - 14x + 49$

7) A expressão $(x+y)^2 - (x^2 + y^2)$ é igual a:

a) 0
b) $2xy$
c) $2x^2 + 2y^2$
d) $2xy - 2x^2 - 2y^2$

8) (FCC-SP) A expressão $(x - y)^2 - (x + y)^2$ é equivalente a:

a) 0

b) $2y^2$

c) $-2y^2$

d) $-4xy$

9) (PUC-SP) A expressão $(2a + b)^2 - (a - b)^2$ é igual a:

a) $3a^2 + 2b^2$

b) $3a^2 + 6ab$

c) $4a^2b + 2ab^2$

d) $4a^2 + 4ab + b^2$

10) A expressão $(a^2 - 1)^2 - (a^2 - a) \cdot (a^2 + a)$ é igual a:

a) $2a^4 + 1$

b) $3a^2 + 1$

c) $-a^2 + 1$

d) $-a^2 + 2$

11) A expressão $\left(x^3 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)$ é igual a:

a) $x^9 + \frac{1}{2}$

b) $x^9 - \frac{1}{4}$

c) $x^6 + \frac{1}{4}$

d) $x^6 - \frac{1}{4}$

12) O desenvolvimento de $\left(3x^5 - \frac{1}{2}\right)^2$ é:

a) $9x^{10} - 2x^5 - \frac{1}{4}$

b) $9x^{10} - 3x^5 + \frac{1}{4}$

c) $9x^{10} - \frac{1}{4}$

d) $9x^{25} - \frac{1}{4}$

13) O termo médio de $\left(xy - \frac{1}{2}\right)^2$ é:

a) xy
b) x^2y^2
■ c) $-xy$
d) $-2xy$

14) (PUC-SP) A expressão $(x + y) . (x^2 + y^2) . (x - y)$ é igual a:

a) $x^4 + y^4$
■ b) $x^4 - y^4$
c) $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$
d) $x^3 + xy^2 + x^2y + y^3$

$(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = x^4 - y^4$

15) (UFV-MG) O produto $(2x^2 + 3x - 5) . (x^2 - 2)^5 . (x^2 - 3x)^3$ é um polinômio de grau:

a) 8
b) 15
■ c) 18
d) 14

Maior expoente da variável em cada polinômio desenvolvido:

$(2x^2) . (x^{10}) . (x^6) = 2x^{18}$

16) (CESCEM-SP) A expressão que deve ser somada a $a^2 + 6a^2b^2 - 12a^2b$ para que resulte o quadrado de $2a - 3ab$ é:

■ a) $3a^2 + 3a^2b^2$
b) $-3a^2 - 3a^2b^2$
c) $a^2 - 9a^2b^2 + 12a^2b$
d) $3a^2 + 3a^2b^2 + 24a^2b$

$E + (a^2 + 6a^2b^2 - 12a^2b) = (2a - 3ab)^2$

$E = 3a^2 + 3a^2b^2$

17) Se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 10$, então $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é igual a:

a) 0
b) 4
c) 6
■ d) 8

$x^2 + 2 . \cancel{x} . \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{x^2} = 10$

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 10$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$

9

FATORAÇÃO

O QUE SIGNIFICA FATORAR?

Fatorar significa transformar em produto.

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Fatorar um polinômio significa transformar esse polinômio num produto indicado de polinômios ou de monômios e polinômios.

A propriedade distributiva será muito usada sob a denominação de **colocar em evidência**. Vejamos a seguir alguns casos de fatoração.

1) FATOR COMUM

Vamos fatorar a expressão: $ax + bx + cx$

$$ax + bx + cx = x \cdot (a + b + c)$$

O **x** é **fator comum** e foi colocado **em evidência.**

Exemplos:

Vamos fatorar as expressões:

❶ $3x + 3y = 3(x + y)$

❷ $5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$

❸ $8ax^3 - 4a^2x^2 = 4ax^2(2x - a)$

Ilustrando os exemplos anteriores:

1) $3x + 3y = 3 . x + 3 . y = 3(x + y)$

2) $5x^2 - 10x = 5 . x . x - 5 . 2 . x = 5x\ (x - 2)$

3) $8ax^3 - 4a^2x^2 = 4 . 2 . a . x^2 . x - 4 . a . a . x^2$

$= 4ax^2(2x - a)$

EXERCÍCIOS

1) Fatore as expressões:

a) $4x + 4y$ $4(x + y)$

b) $7a - 7b$ $7(a - b)$

c) $5x - 5$ $5(x - 1)$

d) $ax - ay$ $a(x - y)$

e) $y^2 + 6y$ $y(y + 6)$

f) $6x^2 - 4a$ $2(3x^2 - 2a)$

g) $4x^5 - 7x^2$ $x^2(4x^3 - 7)$

h) $m^7 - m^3$ $m^3(m^4 - 1)$

i) $a^3 + a^6$ $a^3(1 + a^3)$

j) $x^2 + 13x$ $x(x + 13)$

l) $5m^3 - m^2$ $m^2(5m - 1)$

m) $x^{50} + x^{51}$ $x^{50}(1 + x)$

n) $8x^6 - 12x^3$ $4x^3(2x^3 - 3)$

o) $15x^3 - 21x^2$ $3x^2(5x - 7)$

p) $14x^2 + 42x$ $14x(x + 3)$

q) $x^2y + xy^2$ $xy(x + y)$

2) Fatore as expressões:

a) $2a - 2m + 2n$ $2(a - m + n)$

b) $5a + 20x + 10$ $5(a + 4x + 2)$

c) $4 - 8x - 16y$ $4(1 - 2x - 4y)$

d) $55m + 33n$ $11(5m + 3n)$

e) $35ax - 42ay$ $7a(5x - 6y)$

f) $7am - 7ax - 7an$ $7a(m - x - n)$

g) $5a^2x - 5a^2m - 10a^2$ $5a^2(x - m - 2)$

h) $2ax + 2ay - 2axy$ $2a(x + y - xy)$

3) Fatore as expressões:

a) $15x^7 - 3ax^4$ $3x^4(5x^3 - a)$

b) $2\pi m^2 - 2\pi q$ $2\pi(m^2 - q)$

c) $x^7 + x^8 + x^9$ $x^7(1 + x + x^2)$

d) $a^5 + a^3 - a^2$ $a^2(a^3 + a - 1)$

e) $6x^3 - 10x^2 + 4x^4$ $2x^2(3x - 5 + 2x^2)$

f) $6x^2y + 12xy - 9xyz$ $3xy(2x + 4 - 3z)$

g) $a(x - 3) + b(x - 3)$ $(x - 3)(a + b)$

h) $7(m + n) - a(m + n)$ $(m + n)(7 - a$,

4) Fatore as expressões:

a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^4$

$\frac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)$

b) $\frac{1}{3}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{7}{3}xy$

$\frac{1}{3}xy(x + 2y + 7)$

2) AGRUPAMENTO

Vamos fatorar a expressão: $ax + bx + ay + by$

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$$
$$= (a + b) . (x + y)$$

Observe o que foi feito:

- *Nos dois primeiros termos: "x em evidência".*
- *Nos dois últimos termos: "y em evidência".*
- *Finalmente: "(a + b) em evidência".*

Note que aplicamos duas vezes a fatoração, utilizando o processo do fator comum.

Exemplos:

Vamos fatorar as expressões:

❶ $5ax + bx + 5ay + by = x(5a + b) + y(5a + b)$
$= (5a + b) . (x + y)$

❷ $x^2 + 3x + ax + 3a = x(x + 3) + a(x + 3)$
$= (x + 3) . (x + a)$

EXERCÍCIOS

1) Fatore as expressões:

a) $6x + 6y + ax + ay$ $(x+y)(6+a)$
b) $ax + ay + 7x + 7y$ $(x+y)(a+7)$
c) $2a + 2n + ax + nx$ $(a+n)(2+x)$
d) $ax + 5bx + ay + 5by$ $(a+5b)(x+y)$
e) $3a - 3b + ax - bx$ $(a-b)(3+x)$
f) $7ax - 7a + bx - b$ $(x-1)(7a+b)$
g) $2x - 2 + yx - y$ $(x-1)(2+y)$
h) $ax + a + bx + b$ $(x+1)(a+b)$

2) Fatore as expressões:

a) $m^2 + mx + mb + bx$ $(m+x)(m+b)$
b) $3a^2 + 3 + ba^2 + b$ $(a^2+1)(3+b)$
c) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ $(x+3)(x^2+2)$
d) $x^3 + x^2 + x + 1$ $(x+1)(x^2+1)$
e) $x^3 - x^2 + x - 1$ $(x-1)(x^2+1)$
f) $x^3 + 2x^2 + xy + 2y$ $(x+2)(x^2+y)$
g) $x^2 + 2x + 5x + 10$ $(x+2)(x+5)$
h) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$ $(x-5)(x^2+4)$

3) Fatore as expressões:

a) $ax + bx + ay + by + az + bz$ $(a+b).(x+y+z)$

b) $xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$ $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) $ax - a + \frac{mx}{5} - \frac{m}{5}$ $(x-1)\left(a + \frac{m}{5}\right)$

3) DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Vimos que:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

Então: $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$

Para fatorar a diferença de dois quadrados, basta determinar as raízes quadradas dos dois termos.

Exemplos:

Vamos fatorar as expressões:

❶ $x^2 - 49 = (x + 7).(x - 7)$

❷ $9a^2 - 4b^2 = (3a + 2b).(3a - 2b)$

Cálculos auxiliares: $\sqrt{9a^2} = 3a$; $\sqrt{4b^2} = 2b$

EXERCÍCIOS

1) Fatore as expressões:

a) $a^2 - 25$ $(a+5)(a-5)$

b) $x^2 - 1$ $(x+1)(x-1)$

c) $a^2 - 4$ $(a+2)(a-2)$

d) $9 - x^2$ $(3+x)(3-x)$

e) $x^2 - a^2$ $(x+a)(x-a)$

f) $1 - y^2$ $(1+y)(1-y)$

g) $m^2 - n^2$ $(m+n)(m-n)$

h) $a^2 - 64$ $(a+8)(a-8)$

2) Fatore as expressões:

a) $4x^2 - 25$ $(2x+5)(2x-5)$
b) $1 - 49a^2$ $(1+7a)(1-7a)$
c) $25 - 9a^2$ $(5-3a)(5+3a)$
d) $9x^2 - 1$ $(3x+1)(3x-1)$
e) $4a^2 - 36$ $(2a+6)(2a-6)$
f) $m^2 - 16n^2$ $(m+4n)(m-4n)$
g) $36a^4 - 4$ $(6a^2+2)(6a^2-2)$
h) $81 - x^4$ $(9+x^2)(9-x^2)$
i) $4x^2 - y^2$ $(2x+y)(2x-y)$
j) $16x^4 - 9$ $(4x^2+3)(4x^2-3)$
l) $36x^2 - 4y^2$ $(6x+2y)(6x-2y)$
m) $16a^2 - 9x^2y^2$ $(4a-3xy)(4a+3xy)$
n) $25x^4 - y^6$ $(5x^2-y^3)(5x^2+y^3)$
o) $x^4 - y^4$ $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

3) Fatore as expressões:

a) $\frac{1}{4}x^2 - 25$ $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{2}x-5\right)$

b) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{25}{49}$ $\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{7}\right)$

c) $\frac{1}{9}x^2 - y^2$ $\left(\frac{1}{3}x-y\right)\left(\frac{1}{3}x+y\right)$

d) $\frac{x^2}{36} - \frac{a^2}{25}$ $\left(\frac{x}{6}-\frac{a}{5}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{a}{5}\right)$

e) $\frac{1}{4} - \frac{a^2}{49}$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{7}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{7}\right)$

f) $\frac{m^2}{n^2} - 81$ $\left(\frac{m}{n}+9\right)\left(\frac{m}{n}-9\right)$

g) $m^6 - \frac{1}{9}$ $\left(m^3+\frac{1}{3}\right)\left(m^3-\frac{1}{3}\right)$

h) $\frac{x^2}{49} - \frac{1}{100}$ $\left(\frac{x}{7}+\frac{1}{10}\right)\left(\frac{x}{7}-\right.$

4) TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Vimos que:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Logo: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Logo: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Observe nos exemplos a seguir que:

- os termos extremos fornecem raízes quadradas exatas.
- o termo do meio deve ser o dobro do produto das raízes.
- o resultado terá o sinal do termo do meio.

Exemplos:

Vamos fatorar as expressões:

❶ $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

Mesmo sinal

Cálculos auxiliares:

$\sqrt{x^2} = x$

$\sqrt{25} = 5$

Dobro do produto das raízes $= 2 . x . 5$

Conclusão: O trinômio é um quadrado perfeito.

❷ $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

Mesmo sinal

❸ $4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2$

Mesmo sinal

Cálculos auxiliares:

$\sqrt{4a^2} = 2a$

$\sqrt{9} = 3$

Dobro do produto das raízes $= 2 . (2a) . 3$
$= 12a$

Conclusão: O trinômio é um quadrado perfeito.

❹ $x^2 + 3xy + y^2$

Cálculos auxiliares:

$\sqrt{x^2} = x$

$\sqrt{y^2} = y$

Dobro do produto das raízes $= 2 . x . y$
$= 2xy$

Conclusão: **Não** é um trinômio quadrado perfeito, pois $3xy \neq 2xy$.

EXERCÍCIOS

1) Coloque na forma fatorada as expressões:

a) $x^2 + 4x + 4$ $(x + 2)^2$

b) $x^2 - 4x + 4$ $(x - 2)^2$

c) $a^2 + 2a + 1$ $(a + 1)^2$

d) $a^2 - 2a + 1$ $(a - 1)^2$

e) $x^2 - 8x + 16$ $(x - 4)^2$

f) $a^2 + 6a + 9$ $(a + 3)^2$

g) $a^2 - 6a + 9$ $(a - 3)^2$

h) $1 - 6a + 9a^2$ $(1 - 3a)^2$

2) Fatore as expressões:

a) $m^2 - 12m + 36$ $(m-6)^2$

b) $a^2 + 14a + 49$ $(a+7)^2$

c) $4 + 12x + 9x^2$ $(2+3x)^2$

d) $9a^2 - 12a + 4$ $(3a-2)^2$

e) $9x^2 - 6xy + y^2$ $(3x-y)^2$

f) $x^2 + 20x + 100$ $(x+10)^2$

g) $a^2 - 12ab + 36b^2$ $(a-6b)^2$

h) $9 + 24a + 16a^2$ $(3+4a)^2$

i) $64a^2 - 80a + 25$ $(8a-5)^2$

j) $a^4 - 22a^2 + 121$ $(a^2-11)^2$

l) $36 + 12xy + x^2y^2$ $(6+xy)^2$

m) $y^6 - 2y^3 + 1$ $(y^3-1)^2$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Fatore as expressões (fator comum):

a) $7a + 7b$ $7(a+b)$

b) $ax + ay$ $a(x+y)$

c) $a^3 - a^2$ $a^2(a-1)$

d) $x^3 + 5x$ $x(x^2+5)$

e) $2x^2 - 3xy$ $x(2x-3y)$

f) $10x^5 + x$ $x(10x^4+1)$

g) $8x^2 - 72x$ $8x(x-9)$

h) $7x + x^2$ $x(7+x)$

i) $3a - 3b + 6$ $3(a-b+2)$

j) $4x + 8y - 12z$ $4(x+2y-3z)$

l) $x^2 - 5x^4 + x^6$ $x^2(1-5x^2+x^4)$

m) $3x^2 + 12x^5 + 15x^7$ $3x^2(1+4x^3+5x$

2) Fatore as expressões (agrupamento):

a) $ac + bc + ad + bd$ $(a+b)(c+d)$

b) $3ax + ay + 3bx + by$ $(3x+y)(a+b)$

c) $3ay - 3a + by - b$ $(y-1)(3a+b)$

d) $5am + ay + 5bm + by$ $(5m+y)(a+b)$

e) $8x - 3xy + 8 - 3y$ $(8-3y)(x+1)$

3) Fatore as expressões (diferença de dois quadrados):

a) $a^2 - 4$ $(a+2)(a-2)$

b) $x^2 - 100$ $(x+10)(x-10)$

c) $64 - a^2$ $(8+a)(8-a)$

d) $9x^2 - 1$ $(3x+1)(3x-1)$

e) $25 - 4m^2$ $(5+2m)(5-2m)$

f) $49x^2 - 100$ $(7x+10)(7x-10)$

g) $25m^2 - 81a^2$ $(5m+9a)(5m-9a)$

h) $81a^4 - 16b^8$ $(9a^2-4b^4)(9a^2+4b^4)$

i) $16x^4 - 25$ $(4x^2-5)(4x^2+5)$

j) $1 - 100a^2$ $(1-10a)(1+10a)$

4) Fatore as expressões (trinômio quadrado perfeito):

a) $x^2 - 6x + 9$ $(x-3)^2$

b) $a^2 - 10a + 25$ $(a-5)^2$

c) $m^2 + 2mn + n^2$ $(m+n)^2$

d) $x^2 - 16x + 64$ $(x-8)^2$

e) $a^2 + 10a + 25$ $(a+5)^2$

f) $25x^2 + 60x + 36$ $(5x+6)^2$

g) $49x^2 - 14xy + y^2$ $(7x-y)^2$

h) $64x^2 - 48x + 9$ $(8x-3)^2$

i) $x^4 + 4x^2 + 4$ $(x^2+2)^2$

j) $m^2n^2 - 2mnp + p^2$ $(mn-p)^2$

5) Faça a fatoração completa:

a) $m^3 - m$ $m(m+1)(m-1)$

b) $x^5 - 9x^3$ $x^3(x+3)(x-3)$

c) $x^4 - y^4$ $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

d) $5x^4 - 5$ $5(x+1)(x-1)(x^2+1)$

6) Calcule, aplicando a fatoração da diferença de quadrados:

Resolvido. $100^2 - 90^2 = (100 + 90)(100 - 90) = 190.10 = 1900$

a) $500^2 - 400^2$ 90000

b) $1000^2 - 900^2$ 190000

c) $100^2 - 99^2$ 199

d) $1991^2 - 1990^2$ 3981

7) (F. MAUÁ-SP) Fatore a expressão $ac + 2bc - ad - 2bd$

$(a+2b)c - (a+2b)d = (a+2b)(c-d)$

TESTES

1) Fatorando a expressão $36xy - 9xy^2$, obtemos:

■ a) $9xy(4-y)$

b) $(6x-3y)^2$

c) $(6y+3x)^2$

d) $(6x+3y).(6x-3y)$

2) Fatorando a expressão $7x^4 - 14x^3$, obtemos:

a) $7(x^4 - 2x)$

b) $7(x^2 - 2x)$

c) $7x^4(x-2)$

■ d) $7x^3(x-2)$

3) Fatorando a expressão $a^2 - a + ax - x$, obtemos:

■ a) $(a+x).(a-1)$

b) $(a-x).(a+1)$

c) $(a-x).(a-1)$

d) $(a+x).(a+1)$

4) Qual dos trinômios seguintes é um quadrado perfeito?

a) $x^2 + 2xy + 1$

b) $m^2 - 4m + 4n^2$

■ c) $x^2 - 6x + 9$

d) $x^2 + 10x + 36$

5) Fatorando a expressão $4a^2 - 9b^2$, obtemos:

a) $(2a - 3b)^2$

b) $(2a + 3b)^2$

■ c) $(2a + 3b) . (2a - 3b)$

d) $(a + b) . (a - b)$

6) Fatorando a expressão $m^4 - 100$, obtemos:

a) $(m + 10) . (m - 10)$

■ b) $(m^2 - 10) . (m^2 + 10)$

c) $(m^2 + 10)^2$

d) $(m^2 - 10)^2$

7) Fatorando a expressão $m^2n - n$, obtemos:

a) $m(n - 1)$

b) $n(m - 1)$

c) $n^2(1 - m)$

■ d) $n(m + 1) . (m - 1)$

8) Fatorando a expressão $12x^2 - 36x + 27$, obtemos:

■ a) $3(2x - 3)^2$

b) $3(2x + 3)^2$

c) $3(4x^2 - 12x + 8)$

d) $3(2x + 3) . (2x - 3)$

9) Na fatoração completa de $m^8 - 1$, encontramos:

a) 2 fatores

b) 3 fatores

■ c) 4 fatores

d) 6 fatores

$m^8 - 1 = (m^4 + 1)(m^4 - 1) = (m^4 + 1)(m^2 + 1)(m^2 - 1) = (m^4 + 1)(m^2 + 1)(m + 1)(m - 1$

10) Fatorando $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, obtemos:

a) $(x + 1)^2$

b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

c) $(x^2 + 1)^2$

■ d) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

11) (MED-SANTOS) Calculando $934287^2 - 934286^2$, obtemos:

a) 1

b) 2

■ c) 1868573

d) 1975441

$934287^2 - 934286^2 = (934287 + 934286)(934287 - 934286) = 1868573$

10

FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Fração algébrica é o quociente da divisão de duas expressões algébricas.

Exemplos:

a) $\dfrac{x}{5y}$ b) $\dfrac{x+3}{a-1}$ c) $\dfrac{x-1}{y+2}$

Observações:

1) Nas frações algébricas o numerador e o denominador são polinômios ou monômios.
2) O denominador de uma fração nunca pode ser zero.
3) As propriedades das frações algébricas são as mesmas das frações aritméticas.

SIMPLIFICAÇÃO

Para simplificar uma fração, basta dividir o numerador e o denominador por seus divisores comuns.

Exemplos:

Simplificar as frações:

❶ $$\frac{10\,a^2b}{15\,a^3} = \frac{2\,.\,\cancel{5}\,.\,\cancel{a}\,.\,\cancel{a}\,.\,b}{3\,.\,\cancel{5}\,.\,\cancel{a}\,.\,\cancel{a}\,.\,a} = \frac{2\,b}{3\,a}$$

❷ $$\frac{a^2-9}{a+3} = \frac{\cancel{(a+3)}\,.\,(a-3)}{\cancel{(a+3)}} = a-3$$

- Observe que neste último exemplo, fatoramos os termos da fração e cancelamos os fatores comuns.
- Uma fração que não admite mais simplificação é chamada de **irredutível**.

EXERCÍCIOS

1) Simplifique as frações, admitindo que os denominadores sejam diferentes de zero:

Resolvido. $\dfrac{3x^3a^2}{6x^2a^2} = \dfrac{\not{3}.\not{x}.\not{x}.x.\not{a}.\not{a}}{2.\not{3}.\not{x}.\not{x}.\not{a}.\not{a}} = \dfrac{x}{2}$

a) $\dfrac{12x}{15}$ $\dfrac{4x}{5}$

b) $\dfrac{12m}{6a}$ $\dfrac{2m}{a}$

c) $\dfrac{8x}{10x^2}$ $\dfrac{4}{5x}$

d) $\dfrac{4x^3}{10xy}$ $\dfrac{2x^2}{5y}$

e) $\dfrac{4x^4a}{6x^3}$ $\dfrac{2xa}{3}$

f) $\dfrac{6a^5}{7a^3x}$ $\dfrac{6a^2}{7x}$

g) $\dfrac{8ay}{2xy^3}$ $\dfrac{4a}{xy^2}$

h) $\dfrac{4x^2y}{10xy^3}$ $\dfrac{2x}{5y^2}$

i) $\dfrac{\pi r^2}{2\pi r}$ $\dfrac{r}{2}$

j) $\dfrac{8am}{-4am}$ -2

l) $\dfrac{-14x^3c}{2x}$ $-7x^2c$

m) $\dfrac{64a^3n^2}{4an^2}$ $16a^2$

2) Simplifique as frações, admitindo que os denominadores sejam diferentes de zero:

Resolvido. $\dfrac{8x+8}{10(x+1)} = \dfrac{8(\not{x+1})}{10(\not{x+1})} = \dfrac{4}{5}$

a) $\dfrac{3a-3b}{12}$ $\dfrac{a-b}{4}$

b) $\dfrac{2x+4y}{2a}$ $\dfrac{x+2y}{a}$

c) $\dfrac{3x-3}{4x-4}$ $\dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{3x-3}{3x+6}$ $\dfrac{x-1}{x+2}$

e) $\dfrac{5x+10}{5x}$ $\dfrac{x+2}{x}$

f) $\dfrac{8x-8y}{10x-10y}$ $\dfrac{4}{5}$

g) $\dfrac{3a+3b}{6a+6b}$ $\dfrac{1}{2}$

h) $\dfrac{15x^2+5x}{5x}$ $3x+1$

i) $\dfrac{6x-6y}{3x-3y}$ 2

j) $\dfrac{18x-18}{15x-15}$ $\dfrac{6}{5}$

l) $\dfrac{x^2-x}{x-1}$ x

m) $\dfrac{2x+2y}{6}$ $\dfrac{x+y}{3}$

3) Simplifique as frações, admitindo que os denominadores sejam diferentes de zero:

Resolvido. $\dfrac{a+2}{a^2+4a+4} = \dfrac{a+2}{(a+2)^2} = \dfrac{\cancel{a+2}}{(\cancel{a+2}).(a+2)} = \dfrac{1}{a+2}$

a) $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $x+2$

b) $\dfrac{a^2-9}{5(a+3)}$ $\dfrac{a-3}{5}$

c) $\dfrac{4x^2-y^2}{2x-y}$ $2x+y$

d) $\dfrac{(a+b)^5}{(a+b)^2}$ $(a+b)^3$

e) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ $\dfrac{a-b}{a+b}$

f) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$ $\dfrac{x+y}{x-y}$

g) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\dfrac{x-1}{x+1}$

h) $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1}$ $\dfrac{1}{a+1}$

i) $\dfrac{x^2+6x+9}{2x+6}$ $\dfrac{x+3}{2}$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Recapitulando:

Vamos determinar o m.m.c. dos números 60 e 72 pelo processo de decomposição em fatores primos.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$60 = 2^2 . 3 . 5$

$72 = 2^3 . 3^2$

Sabemos que:

O m.m.c. é o produto de fatores primos comuns e não-comuns, com os maiores expoentes.

Então: m.m.c. $(60,72) = 2^3 . 3^2 . 5$

$= 8 . 9 . 5$

$= 360$

Para determinar o m.m.c. das expressões algébricas, procedemos do mesmo modo.

Exemplos:

1 Calcular o m.m.c. das expressões $4xy^3$ e $10x^2yz$.

Solução:

$4xy^3 = 2^2 . x . y^3$
$10x^2yz = 2 . 5 . x^2 . y . z$

Logo:

m.m.c. $= 2^2 . 5 . x^2 . y^3 . z = 20x^2y^3z$

2 Calcular o m.m.c. das expressões $x^2 - 25$ e $x^2 + 10x + 25$.

Solução:

$x^2 - 25 = (x + 5) . (x - 5)$
$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

Logo:

m.m.c. $= (x + 5)^2 . (x - 5)$

EXERCÍCIOS

1) Determine o m.m.c. dos monômios:

a) $4x^2$ e $2x$ ($4x^2$)
b) $8x$ e $4x$ ($8x$)
c) x^3 e x^2 (x^3)
d) $2x^2$ e x ($2x^2$)
e) $5x^2$ e $3x$ ($15x^2$)
f) $6x^2$ e $10xy$ ($30x^2y$)
g) $5a$ e $15a^2b$ ($15a^2b$)
h) $2x$, $5y$ e $4z$ ($20xyz$)

2) Determine o m.m.c. dos monômios:

a) $2ab$ e $3abc^2$ ($6abc^2$)
b) $7a$ e $21a^3x$ ($21a^3x$)
c) $3x^2y$ e $6xy^2$ ($6x^2y^2$)
d) $4xy$ e $5x^2z$ ($20x^2yz$)
e) $4x^2y$, $6x^3$ e $2x$ ($12x^3y$)
f) $12a$, $15b$ e $9c$ ($180abc$)
g) $9x^4y^2$, x^2y e $12x^3y^3$ ($36x^4y^3$)
h) $10ax^2$, ax^2 e $2x^3$ ($10ax^3$)

3) Determine o m.m.c. das expressões:

a) $(x - 2)$ e $(x^2 - 4)$ $(x^2 - 4)$

b) $(x + 3)$ e $(x^2 - 9)$ $(x^2 - 9)$

c) $(x + 7)$ e $(x^2 - 49)$ $(x^2 - 49)$

d) $(5x - 5)$ e $(x - 1)$ $5(x - 1)$

e) $(x + 1)$ e $(x^2 + 2x + 1)$ $(x + 1)^2$

f) $(x^2 - 9)$ e $(x^2 + 6x + 9)$ $(x + 3)^2(x - 3)$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES ALGÉBRICAS

1) ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Para adicionar ou subtrair frações algébricas utilizaremos as mesmas regras das frações numéricas.

a) As frações apresentam o mesmo denominador.

Somamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador comum.

Exemplos:

❶ $$\frac{5a}{m} + \frac{3a}{m} = \frac{5a + 3a}{m} = \frac{8a}{m}$$

❷ $$\frac{7x}{6a} - \frac{3x}{6a} = \frac{7x - 3x}{6a} = \frac{4x}{6a} = \frac{2x}{3a}$$

EXERCÍCIOS

1) Efetue as operações indicadas:

a) $\frac{5x}{7a} + \frac{3x}{7a}$ $\frac{8x}{7a}$

b) $\frac{3x}{7a} - \frac{x}{7a}$ $\frac{2x}{7a}$

c) $\frac{5}{9a} - \frac{1}{9a}$ $\frac{4}{9a}$

d) $\frac{4x}{7y} - \frac{x}{7y}$ $\frac{3x}{7y}$

e) $\frac{2x}{a} - \frac{8x}{a}$ $-\frac{6x}{a}$

f) $\frac{5x}{3m} + \frac{2x - 9}{3m}$ $\frac{7x - 9}{3m}$

g) $\frac{5x}{8m} - \frac{x - 4}{8m}$ $\frac{4x + 4}{8m} = \frac{x + 1}{2m}$

h) $\frac{a}{y - x} + \frac{a}{y - x}$ $\frac{2a}{y - x}$

i) $\frac{x - 5}{x^2 - 1} + \frac{5}{x^2 - 1}$ $\frac{x}{x^2 - 1}$

j) $\frac{3x^2 - x}{2a + 1} - \frac{x^2 - 2x}{2a + 1}$ $\frac{2x^2 + x}{2a + 1}$

2) Efetue as operações indicadas:

a) $\frac{8x}{a} + \frac{x}{a} - \frac{2x}{a}$ $\frac{7x}{a}$

b) $\frac{7y}{a} - \frac{2y}{a} + \frac{4y}{a}$ $\frac{9y}{a}$

c) $\frac{2x - 3y}{3a} + \frac{3x + 4y}{3a}$ $\frac{5x + y}{3a}$

d) $\frac{x + y}{x - 6} - \frac{5x - 2y}{x - 6}$ $\frac{-4x + 3y}{x - 6}$

b) As frações apresentam denominadores diferentes.

Devemos reduzir as frações ao mesmo denominador comum e em seguida procedemos como no caso anterior.

Exemplo 1

Calcular $\frac{3a}{2x} + \frac{5a}{4x}$

Temos: m.m.c. $(2x, 4x) = 4x$

Logo: $\frac{3a}{2x} + \frac{5a}{4x} = \frac{6a}{4x} + \frac{5a}{4x} = \frac{6a + 5a}{4x} = \frac{11a}{4x}$

Exemplo 2

Calcular $\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2}$

Temos: m.m.c. $(2x, 4x^2) = 4x^2$

Logo: $\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2} = \frac{10x}{4x^2} - \frac{3}{4x^2} = \frac{10x - 3}{4x^2}$

EXERCÍCIOS

1) Efetue as operações indicadas:

a) $\frac{10}{x} - \frac{25}{3x}$ $\frac{5}{3x}$

b) $\frac{3}{2xy} + \frac{1}{xy}$ $\frac{5}{2xy}$

c) $\frac{5a}{3x} + \frac{3a}{2x}$ $\frac{19a}{6x}$

d) $\frac{7}{x^2} + \frac{5}{x}$ $\frac{7 + 5x}{x^2}$

e) $\frac{3}{2x^2} - \frac{8}{x}$ $\frac{3 - 16x}{2x^2}$

f) $\frac{10}{x} - \frac{25}{3x}$ $\frac{5}{3x}$

2) Efetue as operações indicadas:

a) $\frac{7}{10x} - \frac{3}{5x}$ $\frac{1}{10x}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $\frac{y+x}{xy}$

c) $\frac{5}{ax} - \frac{x}{3a}$ $\frac{15-x^2}{3ax}$

d) $\frac{a+3}{4m} + \frac{1}{2m}$ $\frac{a+5}{4m}$

e) $\frac{6x+13}{2y} + \frac{x+3}{3y}$ $\frac{20x+45}{6y}$

f) $\frac{3x-1}{10a} + \frac{5-2x}{15a}$ $\frac{5x+7}{30a}$

Exemplo 3

Calcular $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+2}$

Temos: m.m.c. $= (x-2).(x+2)$

Logo: $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-2).(x+2)} + \frac{5(x-2)}{(x-2).(x+2)}$

$$= \frac{3x+6+5x-10}{(x-2).(x+2)}$$

$$= \frac{8x-4}{(x-2).(x+2)}$$

EXERCÍCIOS

Efetue as operações indicadas:

a) $\frac{4}{x+1} + \frac{2}{x-1}$ $\frac{6x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{5x}{x+2} - \frac{3x}{x-2}$ $\frac{2x^2-16x}{x^2-4}$

c) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1}$ $\frac{x+3}{x^2+x}$

d) $\frac{4}{x} + \frac{5}{x-2}$ $\frac{9x-8}{x^2-2x}$

e) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-1}$ $\frac{x-4}{x^2+x-2}$

f) $\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}$ $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{x+3}$

g) $\frac{3x+2}{x^2-4} - \frac{4}{x+2}$ $\frac{-x+10}{x^2-4}$

h) $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$ $\frac{3x+7}{x^2-4}$

i) $\frac{4x}{x^2-36} - \frac{4}{x+6}$ $\frac{24}{x^2-36}$

j) $\frac{x+1}{2x-4} - \frac{x-1}{3x-6}$ $\frac{x+5}{6(x-2)}$

2) MULTIPLICAÇÃO

Para multiplicar frações algébricas procedemos do seguinte modo:

- *multiplicamos os numeradores entre si.*
- *multiplicamos os denominadores entre si.*

Exemplos:

Calcular os produtos:

❶ $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$

❷ $\frac{3a}{x} \cdot \frac{7}{5y} = \frac{21a}{5xy}$

❸ $\frac{2a}{5c} \cdot \frac{4a^2}{3c} = \frac{8a^3}{15c^2}$

❹ $\frac{x+y}{4a} \cdot \frac{x-y}{m} = \frac{x^2-y^2}{4am}$

Nos casos em que o numerador e o denominador têm fatores comuns, podemos cancelá-los antes de efetuar a multiplicação.

Exemplos:

❶ $\frac{a}{3\cancel{x}} \cdot \frac{2\cancel{x}}{5} = \frac{2a}{15}$

❷ $\frac{\cancel{3x-2}}{5} \cdot \frac{7a}{\cancel{3x-2}} = \frac{7a}{5}$

EXERCÍCIOS

1) Efetue as multiplicações:

a) $\frac{3a}{x} \cdot \frac{y}{2}$ $\frac{3ay}{2x}$

b) $\frac{2x}{5} \cdot \frac{4a}{x}$ $\frac{8a}{5}$

c) $\frac{3}{a} \cdot \frac{5y}{y}$ $\frac{15x}{ay}$

d) $\frac{2a}{x} \cdot \frac{5b}{y}$ $\frac{10ab}{xy}$

2) Efetue as multiplicações:

a) $\frac{7a}{m^2} \cdot \frac{2a}{5m}$ $\frac{14a^2}{5m^3}$

b) $\frac{2x}{7a} \cdot \frac{4x}{5a}$ $\frac{8x^2}{35a^2}$

c) $\frac{m}{x^2} \cdot \frac{6a^3}{7x}$ $\frac{6a^3m}{7x^3}$

d) $\frac{3x}{2y} \cdot \frac{x^2}{4}$ $\frac{3x^3}{8y}$

e) $\frac{3xy}{5a} \cdot \frac{2x^3}{a^2y}$ $\frac{6x^4}{5a^3}$

f) $\frac{2x}{a} \cdot \frac{x}{4a}$ $\frac{x^2}{2a^2}$

g) $\frac{2am}{3bx} \cdot \frac{9a}{4x}$ $\frac{3a^2m}{2bx^2}$

h) $\frac{5x^2}{3y} \cdot \frac{2x}{y^3}$ $\frac{10x^3}{3y^4}$

3) Efetue as multiplicações:

a) $\frac{x+y}{7} \cdot \frac{x-y}{2}$ $\frac{x^2-y^2}{14}$

b) $\frac{4}{x+y} \cdot \frac{x+y}{5}$ $\frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{x-y} \cdot \frac{1}{x+y}$ $\frac{1}{x^2-y^2}$

d) $\frac{7-x}{7+x} \cdot \frac{7+x}{7-x}$ 1

e) $\frac{x+1}{x-5} \cdot \frac{x-1}{x+5}$ $\frac{x^2-1}{x^2-25}$

f) $\frac{a+b}{7} \cdot \frac{a+b}{ab}$ $\frac{a^2+2ab+b^2}{7ab}$

g) $\frac{8m}{m-1} \cdot \frac{m}{m+1}$ $\frac{8m^2}{m^2-1}$

h) $\frac{x^2-9}{5} \cdot \frac{10}{x-3}$ $2(x+3)$

3) DIVISÃO

Multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda.

Exemplos:

Calcular os quocientes:

❶ $\frac{2x}{a} : \frac{3m}{5c} = \frac{2x}{a} \cdot \frac{5c}{3m} = \frac{10cx}{3am}$

❷ $\frac{5x^2}{3a} : \frac{7b}{2x} = \frac{5x^2}{3a} \cdot \frac{2x}{7b} = \frac{10x^3}{21ab}$

❸ $\frac{a}{x+y} : \frac{m}{x+y} = \frac{a}{\cancel{x+y}} \cdot \frac{\cancel{x+y}}{m} = \frac{a}{m}$

EXERCÍCIOS

1) Calcule os quocientes:

a) $\frac{2a}{b} : \frac{x}{y}$ $\frac{2ay}{bx}$

b) $\frac{3x}{4} : \frac{5y}{7}$ $\frac{21x}{20y}$

c) $\frac{x}{2} : \frac{ax}{8}$ $\frac{4}{a}$

d) $\frac{5x}{a} : \frac{a}{xy}$ $\frac{5x^2y}{a^2}$

e) $\frac{3x}{2} : \frac{6x^2}{4}$ $\frac{1}{x}$

f) $\frac{2y}{x} : \frac{10x}{3y}$ $\frac{3y^2}{5x^2}$

g) $\frac{2a}{3x^2} : \frac{5a^2}{9xy}$ $\frac{6y}{5xa}$

h) $\frac{3a}{4m^2} : \frac{9m^2}{16a}$ $\frac{4a^2}{3m^4}$

2) Calcule os quocientes:

a) $\dfrac{x+1}{5x} : \dfrac{a}{x-1}$ $\quad \dfrac{x^2-1}{5ax}$

b) $\dfrac{am}{x+y} : \dfrac{m}{x+y}$ $\quad a$

c) $\dfrac{x^2-1}{5x+5} : \dfrac{5x-5}{x+1}$ $\quad \dfrac{x+1}{25}$

d) $\dfrac{a-b}{a} : \dfrac{3a-3b}{5a}$ $\quad \dfrac{5}{3}$

3) Efetue:

Resolvido.

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x} = x$$

a) $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{5a}{x}}$ $\quad \dfrac{1}{5a}$

b) $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{5x^2}{8}}$ $\quad \dfrac{4}{5x}$

c) $\dfrac{6x}{\frac{3x}{4}}$ $\quad 8$

d) $\dfrac{\frac{x^2}{y}}{\frac{x}{y^3}}$ $\quad xy^2$

e) $\dfrac{\frac{x^5}{y^3}}{\frac{x^2}{y^8}}$ $\quad x^3y^5$

f) $\dfrac{\frac{2x^3}{y^2}}{\frac{4x}{y^5}}$ $\quad \dfrac{x^2y^3}{2}$

POTENCIAÇÃO

Elevamos o numerador e o denominador à potência indicada.

Exemplos:

Vamos calcular as potências:

❶ $\left(\dfrac{3x^2}{5am^3}\right)^2 = \dfrac{(3x^2)^2}{(5am^3)^2} = \dfrac{9x^4}{25a^2m^6}$

❷ $\left(\dfrac{4a}{x-3}\right)^2 = \dfrac{(4a)^2}{(x-3)^2} = \dfrac{16a^2}{x^2-6x+9}$

EXERCÍCIOS

1) Calcule as potências:

a) $\left(\frac{a}{5m}\right)^2$ $\frac{a^2}{25m^2}$

b) $\left(\frac{7x}{a}\right)^2$ $\frac{49x^2}{a^2}$

c) $\left(\frac{3x}{a^2}\right)^2$ $\frac{9x^2}{a^4}$

d) $\left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^3$ $\frac{8a^9}{27x^6}$

e) $\left(\frac{2a^2}{x^3}\right)^3$ $\frac{8a^6}{x^9}$

f) $\left(\frac{6c^2}{5}\right)^2$ $\frac{36c^4}{25}$

2) Calcule as potências:

a) $\left(\frac{2a^3}{m^4}\right)^2$ $\frac{4a^6}{m^8}$

b) $\left(\frac{a^5}{2b}\right)^3$ $\frac{a^{15}}{8b^3}$

c) $\left(\frac{2m^5}{3}\right)^4$ $\frac{16m^{20}}{81}$

d) $\left(\frac{am^4}{c^3}\right)^2$ $\frac{a^2m^8}{c^6}$

e) $\left(\frac{2x^5}{a^3c^3}\right)^2$ $\frac{4x^{10}}{a^6c^6}$

f) $\left(\frac{m^3}{2n^2}\right)^5$ $\frac{m^{15}}{32n^{10}}$

3) Calcule as potências:

a) $\left(-\frac{2x}{y}\right)^2$ $\frac{4x^2}{y^2}$

b) $\left(-\frac{3x^3}{a^6}\right)^2$ $\frac{9x^6}{a^{12}}$

c) $\left(-\frac{5x^4}{2a^3}\right)^3$ $-\frac{125x^{12}}{8a^9}$

d) $\left(-\frac{2x}{y}\right)^5$ $-\frac{32x^5}{y^5}$

e) $\left(-\frac{4x^2}{3y}\right)^2$ $\frac{16x^4}{9y^2}$

f) $\left(-\frac{2x^2}{3y^3}\right)^4$ $\frac{16x^8}{81y^{12}}$

4) Calcule as potências:

a) $\left(\frac{4x}{x+2}\right)^2$ $\frac{16x^2}{x^2+4x+4}$

b) $\left(-\frac{x}{3y^2}\right)^2$ $\frac{x^2}{9y^4}$

c) $\left(\frac{x-1}{3}\right)^2$ $\frac{x^2-2x+1}{9}$

d) $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2$ $\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$

5) Simplifique:

a) $\frac{5(m^2)^4}{(5m)^2}$ $\frac{m^6}{5}$

b) $\frac{3(x^4)^3}{(2x^2)^4}$ $\frac{3x^4}{16}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{x^4}{x^2}$ x^2

b) $\frac{x^5m^7}{x^2m^2}$ x^3m^5

c) $\frac{4\,m^3n^2}{8\,m^4n^2}$ $\frac{1}{2m}$

d) $\frac{5\,ax^2y^3}{15\,xy^2}$ $\frac{axy}{3}$

e) $\frac{x^3 + x}{x}$ $x^2 + 1$

f) $\frac{x + 9}{7x + 63}$ $\frac{1}{7}$

g) $\frac{3x - 3y}{x^2 - y^2}$ $\frac{3}{x + y}$

h) $\frac{5a + 5}{1 - a^2}$ $\frac{5}{1 - a}$

2) Efetue as operações indicadas:

a) $\frac{7a}{3x} - \frac{2a}{3x}$ $\frac{5a}{3x}$

b) $\frac{x}{x + 2} + \frac{3x}{x + 2}$ $\frac{4x}{x + 2}$

c) $\frac{7x - 1}{x^2 + 1} - \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$ $\frac{5x + 2}{x^2 + 1}$

d) $\frac{3}{2a} + \frac{4}{a}$ $\frac{11}{2a}$

e) $\frac{7}{10x} - \frac{4}{5x} - \frac{5}{2x}$ $-\frac{13}{5x}$

f) $\frac{3}{x + 1} + \frac{8}{x - 1}$ $\frac{11x + 5}{x^2 - 1}$

g) $\frac{x + 4}{5x^2} - \frac{1}{3x}$ $\frac{-2x + 12}{15x^2}$

h) $\frac{7}{a - 5} - \frac{3}{a - 2}$ $\frac{4a + 1}{a^2 - 7a + 10}$

3) Efetue as multiplicações:

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{m^2}{n} \cdot \frac{n}{m^2}$ 1

c) $\frac{a^2}{c^5} \cdot \frac{c^4}{a^2}$ $\frac{1}{c}$

d) $\frac{5x}{7m} \cdot \frac{4m}{3y}$ $\frac{20x}{21y}$

e) $\frac{4x^2}{5y} \cdot \frac{10x}{y^2}$ $\frac{8x^3}{y^3}$

f) $\frac{7bc}{9a} \cdot \frac{4c}{a^2}$ $\frac{28bc^2}{9a^3}$

g) $\frac{3}{x + 4} \cdot \frac{x - y}{7}$ $\frac{3x - 3y}{7x + 28}$

h) $\frac{x + 2}{x - 7} \cdot \frac{x - 2}{x + 7}$ $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 49}$

4) Calcule os quocientes:

a) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ $\frac{ad}{bc}$

b) $\frac{9}{x} : \frac{6}{x}$ $\frac{3}{2}$

c) $\frac{4x}{15} : \frac{5}{7x}$ $\frac{28x^2}{75}$

d) $\frac{6am}{5c} : \frac{3ac}{2d}$ $\frac{4md}{5c^2}$

e) $\frac{5}{x-2} : \frac{4}{3x-6}$ $\frac{15}{4}$

f) $\frac{a^2-c^2}{c^2} : \frac{a+c}{7}$ $\frac{7(a-c)}{c^2}$

5) Efetue:

a) $\dfrac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ $2x-1$

b) $\dfrac{3+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$ $3x+2$

c) $\dfrac{2-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}$ $\frac{2x-3}{2x+1}$

d) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$ $\frac{1}{x-1}$

e) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ $\frac{y+x}{y-x}$

f) $\dfrac{x+\frac{x}{3}}{x-\frac{x}{3}} + \dfrac{x}{\frac{x}{3}}$ 5

6) Calcule as potências:

a) $\left(\frac{2x^2}{a}\right)^3$ $\frac{8x^6}{a^3}$

b) $\left(\frac{-4x^2}{7a}\right)^2$ $\frac{16x^4}{49a^2}$

c) $\left(\frac{2m^8}{7}\right)^2$ $\frac{4m^{16}}{49}$

d) $\left(\frac{a^3c^2}{y}\right)^5$ $\frac{a^{15}c^{10}}{y^5}$

e) $\left(\frac{-3a^3}{n^2}\right)^2$ $\frac{9a^6}{n^4}$

f) $\left(\frac{-2x}{n}\right)^5$ $-\frac{32x^5}{n^5}$

TESTES

1) O m.m.c. dos monômios $6x^2am$ e $4x^5a^2$ é:

a) $12x^{10}a^2m$

b) $12x^5a^2m$

c) $12x^7a^3m$

d) $10x^5a^2m$

2) A fração algébrica $\dfrac{3x+7}{7+3x}$ é equivalente a:

a) 0

b) 1

c) -1

d) $10x$

3) Simplificando a fração $\dfrac{5x^2+30x-20}{10}$, obtemos:

a) $5x^2+3x-20$

b) $\dfrac{x^2+30x-20}{2}$

c) $5x^2+30x-2$

d) $\dfrac{x^2+6x-4}{2}$

4) Simplificando a expressão $\dfrac{4x^2+4x}{4x}$, obtemos:

a) $4x^2$

b) $2x^2$

c) $2x$

d) $x+1$

5) Simplificando a expressão $\dfrac{x^2-6x+9}{2x-6}$, obtemos:

a) $\dfrac{x-3}{2}$

b) $\dfrac{x-3}{2x}$

c) $\dfrac{x-3}{x+3}$

d) $\dfrac{x+3}{2}$

6) (FAAP-SP) Simplificando a expressão $\dfrac{ax^2-ay^2}{x^2-2xy+y^2}$, obtemos:

a) $\dfrac{a}{x-y}$

b) $\dfrac{a(x+y)}{x-y}$

c) $\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $a(x+y)$

7) A expressão $\frac{a+b}{x+y} + \frac{b+c}{x+y}$ é igual a:

a) $\frac{a+b^2+c}{x+y}$

b) $\frac{a+b^2+c}{2x+2y}$

c) $\frac{a+2b+c}{2x+2y}$

■ d) $\frac{a+2b+c}{x+y}$

8) (CESCEA-SP) Efetuando-se as operações em $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3}$ obtém-se:

■ a) $\frac{x+5y}{6}$

b) $\frac{5x+y}{6}$

c) $\frac{x+y}{6}$

d) $\frac{-x+5y}{6}$

9) Efetuando $\frac{1+m}{1+\frac{1}{m}}$, obtemos:

■ a) m

b) $\frac{1}{m}$

c) 2m

d) $\frac{m}{(m+1)^2}$

10) Efetuando $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}}$, obtemos:

a) $\frac{2x+1}{x}$

b) $\frac{x+2}{x}$

■ c) $\frac{2x^2+1}{x}$

d) $\frac{x^2+2}{x}$

11) (PUC-SP) Simplificando $\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}$, obtém-se:

a) $\frac{b}{a}$

■ b) $\frac{a}{b}$

c) $\frac{a+1}{b}$

d) $\frac{b+1}{a}$

12) (GV-SP) Simplificando-se $\dfrac{a + b}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, obtemos:

a) $\dfrac{1}{ab}$

■ b) ab

c) $\dfrac{a + b}{-a - b}$

d) $-ab$

13) (PUC-MG) A expressão $\dfrac{\dfrac{y}{y-1} - 1}{1 + \dfrac{y}{1-y}}$ é igual a:

a) 1

b) 2

■ c) -1

d) -2

14) (UNB-DF) A expressão $\dfrac{3a - 4}{a^2-16} - \dfrac{1}{a-4}$ ($a \neq 4$) é equivalente a:

a) $\dfrac{1}{a-4}$

■ b) $\dfrac{2}{a+4}$

c) $\dfrac{2}{a-4}$

d) n.d.a.

15) (UMC-SP) Simplificando $\dfrac{x^2}{xy - y^2} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2 + xy}$, obtemos:

■ a) $\dfrac{x}{y}$

b) $\dfrac{y}{x}$

c) $\dfrac{x-y}{x+y}$

d) $\dfrac{x+y}{x-y}$

$\dfrac{x^2}{y(x-y)} \cdot \dfrac{(x+y)(x-y)}{x(x+y)} = \dfrac{x^2}{yx} = \dfrac{x}{y}$

16) Simplificando a fração $\left(\dfrac{x-y}{y-x}\right)^{1990}$, obtemos:

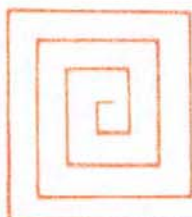
■ a) 1

b) 1990

c) $x + y$

d) $y - x$

$\left[\dfrac{x-y}{-(x-y)}\right]^{1990} = (-1)^{1990} = 1$

11

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

CONCEITO

Uma equação é **fracionária** quando apresenta variável no denominador.

Exemplos:

a) $\frac{5}{2x} - 8 = \frac{7}{x}$

b) $\frac{4x}{x-2} + \frac{5}{x-1} = 6$

CONJUNTO UNIVERSO DE UMA EQUAÇÃO FRACIONÁRIA

O denominador nunca pode ser zero.

Assim:

a) $\frac{5}{2x} - 8 = \frac{7}{x} \Rightarrow x \neq 0$

b) $\frac{4x}{x-2} + \frac{5}{x-1} = 6 \Rightarrow x \neq 2 \text{ e } x \neq 1$

O conjunto universo de uma equação fracionária não deve conter os valores que anulem o denominador.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS EM IR

As equações fracionárias são resolvidas do mesmo modo que se resolvem as equações que apresentam denominadores numéricos.

Exemplo 1

Resolver a equação: $\frac{1}{3x} + \frac{5}{6} = \frac{1}{2x}$ $(x \neq 0)$

Solução:

$$\frac{1}{3x} + \frac{5}{6} = \frac{1}{2x}$$

• m.m.c. = 6x

$$\frac{2}{6x} + \frac{5x}{6x} = \frac{3}{6x}$$

• Eliminando os denominadores

$$2 + 5x = 3$$
$$5x = 3 - 2$$
$$5x = 1$$
$$x = \frac{1}{5}$$

Logo: $V = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações, excluindo do conjunto universo $\mathbb{R}$ os valores da variável que anulam os denominadores:

1) $\frac{2}{x} + 1 = \frac{4}{x}$ $V = \{2\}$

2) $8 - \frac{5}{x} = \frac{3}{x}$ $V = \{1\}$

3) $\frac{10}{x} - 3 = \frac{5}{2}$ $V = \left\{\frac{20}{11}\right\}$

4) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{x}$ $V = \{8\}$

5) $\frac{1}{x} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2x}$ $V = \{2\}$

6) $\frac{7}{2x} + 3 = \frac{8}{x}$ $V = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

7) $\frac{x-2}{x} = \frac{2}{7}$ $V = \left\{\frac{14}{2}\right\}$

8) $\frac{3x-1}{x} = \frac{5}{3}$ $V = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

Exemplo 2

Resolver a equação: $\frac{7}{x-4} = \frac{5}{x-10}$ $(x \neq 4 \text{ e } x \neq 10)$

Solução:

$$\frac{7}{x-4} = \frac{5}{x-10}$$

• m.m.c = (x – 4) (x – 10)

$$\frac{7(x-10)}{(x-4)(x-10)} = \frac{5(x-4)}{(x-4)(x-10)}$$

• Eliminando os denominadores

• Eliminando os parênteses

$$7(x-10) = 5(x-4)$$
$$7x - 70 = 5x - 20$$
$$7x - 5x = -20 + 70$$
$$2x = 50$$
$$x = 25$$

Logo: $V = \{25\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações, excluindo do conjunto universo $\mathbb{R}$ os valores da variável que anulam os denominadores:

1) $\frac{6}{x+2} = \frac{3}{x-8}$ $V = \{18\}$

2) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x+1}{x-1}$ $V = \{3\}$

3) $\frac{12}{x+3} = \frac{8}{x-3}$ $V = \{15\}$

4) $\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+1} = 2$ $V = \{-4\}$

5) $\frac{4}{x-5} = \frac{2}{2x-3}$ $V = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

6) $\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+4}$ $V = \{6\}$

7) $\frac{6}{x+2} = \frac{3}{x} - \frac{9}{x}$ $V = \{-1\}$

8) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{3}$ $V = \{4\}$

Exemplo 3

Resolver a equação: $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{7}{x^2-4}$ $(x \neq 2 \text{ e } x \neq -2)$

Solução:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{7}{x^2-4}$$

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{7}{(x+2)(x-2)}$$

• Fatoramos os denominadores

$$\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{7}{(x+2)(x-2)}$$

• m.m.c. = $(x+2)(x-2)$

$$3(x+2) + 2(x-2) = 7$$

• Eliminamos os denominadores

$$3x + 6 + 2x - 4 = 7$$

• Eliminamos os parênteses

$$3x + 2x = 7 - 6 + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Logo: $V = \{1\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações, excluindo do conjunto universo $\mathbb{R}$ os valores da variável que anulam os denominadores:

1) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = 0$ $V = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

2) $\frac{x}{x+3} - 1 = \frac{5}{x^2-9}$ $V = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

3) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ $V = \varnothing$ • *O 2 anula o denominador*

4) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$ $V = \varnothing$

• *O 1 anula o denominador.*

5) $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{2}{x^2-4}$ $V = \{7\}$

6) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{4}{3(x-1)} = \dfrac{4}{x^2-1}$ $V = \{5\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Resolva as equações, excluindo do conjunto universo IR os valores da variável que anulam os denominadores:

1) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{12}$ $V = \{-108\}$

2) $\dfrac{3}{x} - 1 = \dfrac{3}{2}$ $V = \left\{\dfrac{6}{5}\right\}$

3) $2 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{x}$ $V = \{3\}$

4) $\dfrac{9}{x} + \dfrac{6}{x} = 3$ $V = \{5\}$

5) $8 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{x}$ $V = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

6) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{x}$ $V = \{-4\}$

7) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{x}$ $V = \{4\}$

8) $\dfrac{x+1}{3x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3}$ $V = \{4\}$

9) $\dfrac{3}{4x} - \dfrac{3}{5x} + \dfrac{1}{10} = 0$ $V = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

10) $\dfrac{4x+5}{8x} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1-x}{2x}$ $V = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

11) $\dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{3}{5}$ $V = \{12\}$

12) $\dfrac{3x}{x-4} - \dfrac{2}{x} = 3$ $V = \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$

13) $\dfrac{x+7}{x+5} - \dfrac{12}{x-5} = 1$ $V = \{-7\}$

14) $\dfrac{7}{x-2} = 1 - \dfrac{2x-11}{x-2}$ $V = \varnothing$

15) $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{x}{x^2-9} - \dfrac{3}{x-3}$ $V = \{\quad\}$

16) $\dfrac{3}{x+5} = \dfrac{10}{x^2-25} - \dfrac{1}{x-5}$ $V = \varnothing$

• *O 5 anula o denominador.*

TESTES

1) Sejam as equações do 1º grau:

I) $\frac{2x}{3} - 4 = 5$ *(N)* II) $\frac{5}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ *(S)* III) $\frac{x}{2} - \frac{2x}{7} = 1$ *(N)*

Quantas são equações fracionárias?

a) 0
■ b) 1
c) 2
d) 3

2) (MACK-SP) O conjunto solução da equação $\frac{x+2}{x} = 2$, em $\mathbb{R}^*$, é:

a) V = { 0 }
■ b) V = { 2 }
c) V = { –2 }
d) V = ∅

3) O conjunto universo da equação $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{3}$ é:

a) $\mathbb{R}$ – { 3 }
b) $\mathbb{R}$ – { 5 }
■ c) $\mathbb{R}$ – { 1 }
d) $\mathbb{R}$ – { 1 , 3 }

4) A raiz da equação $\frac{1}{4x} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{12} = 0$ é o número:

■ a) 5
b) 11
c) – 5
d) – 11

5) O conjunto verdade da equação $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-2}$ é:

■ a) V = { 5 }
b) V = { 11 }
c) V = { – 5 }
d) V = ∅

6) O conjunto verdade da equação $\frac{8x+10}{5x} = \frac{8-x}{15x} + \frac{1}{5}$ é:

a) V = { 1 }
b) V = { 2 }
■ c) V = { –1 }
d) V = { – 2 }

7) O conjunto verdade da equação $\frac{2-x}{x-2} + \frac{x}{x-2} = 1$ é:

a) V = { 2 }

b) V = { 3 }

c) V = { 4 }

d) V = { 5 }

8) (PUC-SP) O conjunto solução da equação $\frac{x}{x-1} + 3 = \frac{1}{x-1} - 1$ é:

a) { 0 }

b) $\frac{3}{5}$

c) { 1 }

d) ∅

O 1 anula o denominador.

9) Se 3 é solução da equação $m + \frac{1}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$, então o valor de m é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

10) (FIB) A solução de $\frac{5}{x} - \frac{1}{12x} + \frac{1}{2} = \frac{5-3x}{3x} + \frac{1}{4x}$ é:

a) x = 1

b) x = 2

c) x = – 1

d) x = –2

11) (UF-PA) A raiz da equação do 1º grau

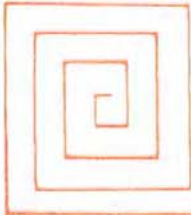
$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-3}{x-1} + \frac{4-x}{x+1} \text{ é:}$$

a) – 3

b) 5

c) – 5

d) 3

12

EQUAÇÕES LITERAIS DO 1º GRAU

CONCEITO

> Dizemos que uma equação é **literal** quando apresenta pelo menos uma letra que não seja incógnita.

Exemplos:

1) $ax + b = 0$
2) $2x - a = 5b$
3) $6x + 5a = a - 3$
4) $7x - a = m - x$

Nessas equações, além da incógnita x, existem outras letras (a, b, m) que são chamadas de **parâmetros.**

RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LITERAL

As equações literais com uma incógnita são resolvidas do mesmo modo que as outras equações do 1º grau estudadas anteriormente.

Exemplo 1

Resolver a equação: $2a + 5x = 3b - 2x$

Solução:

$$5x + 2x = 3b - 2a$$
$$7x = 3b - 2a$$
$$x = \frac{3b - 2a}{7}$$

Logo: $V = \left\{ \frac{3b - 2a}{7} \right\}$

Exemplo 2

Resolver a equação: $cx - 5 = 3x + 4a$

Solução:

$$cx - 3x = 4a + 5$$
$$x(c-3) = 4a + 5$$
$$x = \frac{4a+5}{c-3}$$

A equação tem solução para $c - 3 \neq 0$, ou seja, $c \neq 3$.

Logo: $V = \left\{\frac{4a+5}{c-3}\right\}$; $(c \neq 3)$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações literais (x é a incógnita):

a) $5x + m = 4m$ $V = \left\{\frac{3m}{5}\right\}$

b) $3x - a = 7$ $V = \left\{\frac{7+a}{3}\right\}$

c) $3ax + 4a = 6a$ $V = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

d) $4x - a = -x + c$ $V = \left\{\frac{c+a}{5}\right\}$

e) $mx = 3m + 2 + x$ $V = \left\{\frac{3m+2}{m-1}\right\}; m \neq 1$

f) $4a + 3x = 12a + x$ $V = \{4a\}$

g) $4x - ax + 3 = 36$ $V = \left\{\frac{33}{4-a}\right\}; a \neq 4$

h) $5x - a = 2ax + 7$ $V = \left\{\frac{7+a}{5-2a}\right\}; a \neq \frac{5}{2}$

2) Resolva as seguintes equações literais (x é a incógnita):

a) $5(x-a) = 2(x+c)$ $V = \left\{\frac{5a+2c}{3}\right\}$

b) $3(2a+x) = 9a$ $V = \{a\}$

c) $x(a+4) = 3(x-1)$ $V = \left\{-\frac{3}{a+1}\right\}$

d) $3(x-2b) - 9a - 15b = 0$ $V = \{7b + 3a\}$

e) $3(ax-4) = 2(x-a) - 5$ $V = \left\{\frac{7-2a}{3a-2}\right\}; a \neq \frac{2}{3}$

f) $a(x-2) - b(x-1) = b - a$ $V = \left\{\frac{a}{a-b}\right\}; a \neq b$

g) $2(2a+3x) - 3(3a+x) = 4a$ $V = \{3a\}$

Exemplo 3

Resolver a equação: $\frac{x}{a} + \frac{x}{m} = 5$

Solução:

- m.m.c. = am $\quad \frac{xm}{am} + \frac{xa}{am} = \frac{5\,am}{am}$
- Eliminando os denominadores $\quad xm + xa = 5\,am$
- Fatorando x no 1º membro $\quad x\,(m + a) = 5\,am$

$$x = \frac{5am}{m + a}$$

Logo: $V = \left\{ \frac{5\,am}{m + a} \right\}$; $(m + a \neq 0)$

EXERCÍCIOS

Resolva as seguintes equações literais (x é a incógnita):

a) $\frac{x}{m} + 3m = 4m$ $\quad V = \{m^2\}$

b) $\frac{3x}{a} - \frac{4}{a} = 2$ $\quad V = \left\{ \frac{4 + 2a}{3} \right\}$

c) $\frac{x}{a} = 4 - \frac{2}{3a}$ $\quad V = \left\{ \frac{12a - 2}{3} \right\}$

d) $\frac{4a - x}{3} = \frac{x - 4a}{2}$ $\quad V = \{4a\}$

e) $ax + \frac{m}{a} = mx + 1$ $\quad V = \left\{ \frac{1}{a} \right\}$; $a \neq o$

f) $\frac{x - 8a}{2} = 3\,(3a - 2x)$ $\quad V = \{2a\}$

g) $\frac{x + a}{b} = \frac{x - b}{a} + 2$ $\quad V = \{b - a\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Resolva as seguintes equações literais (x é a incógnita):

a) $3x + a = 9a$ $V = \left\{\frac{8a}{3}\right\}$

b) $2x - m = 5m - x$ $V = \{2m\}$

c) $2x + 3c = x + 5c$ $V = \{2c\}$

d) $3ax - 8 = ax$ $V = \left\{\frac{4}{a}\right\}; a \neq 0$

e) $3ax + 5a = 7a$ $V = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

f) $nx - 3 = 2n + 2$ $V = \left\{\frac{2n + 5}{n}\right\}; n \neq 0$

g) $ax - bx = a^2 - b^2$ $V = \{a + b\}; a - b \neq 0$

h) $2(x + m) = x - m$ $V = \{-3m\}$

i) $a(x - 1) = c(1 - x)$ $V = \{1\}$

j) $2(2x - a) = \frac{2c}{3}$ $V = \left\{\frac{3a + c}{6}\right\}$

2) Resolva as seguintes equações literais (x é a incógnita):

a) $\frac{x + 1}{2} = \frac{c + x}{4}$ $V = \{c - 2\}$

b) $\frac{x - n}{2} = \frac{x + n}{3}$ $V = \{5n\}$

c) $\frac{x - 4a}{2} = \frac{4a - x}{3}$ $V = \{4a\}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{a}{2} = \frac{x}{3} + a$ $V = \{9a\}$

TESTES

1) O conjunto verdade da equação $7x - a = 6a$ é:

a) $V = \{ 7a \}$

■ b) $V = \{ a \}$

c) $V = \{ 2a \}$

d) $V = \{ 5a \}$

2) O conjunto verdade da equação $5x - a = 2m$ é:

a) $V = \left\{ \dfrac{2am}{5} \right\}$

b) $V = \left\{ \dfrac{2m}{5a} \right\}$

c) $V = \left\{ \dfrac{2a + m}{5} \right\}$

■ d) $V = \left\{ \dfrac{2m + a}{5} \right\}$

3) O conjunto verdade da equação $ax + 1 = x + a$ é:

a) $V = \{ a - 1 \}$

b) $V = \{ 2a - 2 \}$

c) $V = \{ 0 \}$ com $a \neq 1$

■ d) $V = \{ 1 \}$ com $a \neq 1$

4) O conjunto verdade da equação $5(x - a) = 2(x + m)$ é:

■ a) $V = \left\{ \dfrac{5a + 2m}{3} \right\}$

b) $V = \left\{ \dfrac{2a + 5m}{3} \right\}$

c) $V = \left\{ \dfrac{5a - 2m}{3} \right\}$

d) $V = \left\{ \dfrac{2a - 5m}{3} \right\}$

5) O conjunto verdade da equação $3(x - a) + 2(x + a) = a$ é:

a) $V = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

b) $V = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

■ c) $V = \left\{\frac{2a}{5}\right\}$

d) $V = \left\{\frac{5a}{2}\right\}$

6) (UMC-SP) Se $s = \frac{at}{a + t}$, então t é igual a:

■ a) $\frac{as}{a - s}$

b) $\frac{as}{a + s}$

c) $\frac{a + s}{as}$

d) $\frac{a - s}{a + s}$

$at = as + ts$

$t(a - s) = as$

$t = \frac{as}{a - s}$

7) (ETI-SP) Resolvendo a equação $\frac{-\frac{2}{a} + x}{-\frac{1}{a} - 3x} = 1$, com $a \neq 0$, teremos:

a) $x = \frac{a}{4}$

b) $x = \frac{4}{a}$

c) $x = 4a$

■ d) $x = \frac{1}{4a}$

$\frac{-2 + ax}{-1 - 3ax} = 1$

$ax + 3ax = -1 + 2$

$4ax = 1$

$x = \frac{1}{4a}$

8) (PUC-SP) A equação $mx - 1 = nx + 1$ possui solução real se e somente se:

■ a) $m \neq n$

b) $m = n$

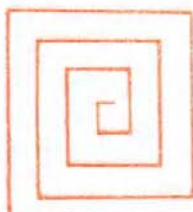
c) $m < n$

d) $m > n$

$mx - nx = 2$

$x = \frac{2}{m - n}$

Logo: $m \neq n$

13

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA

PONTO, RETA E PLANO

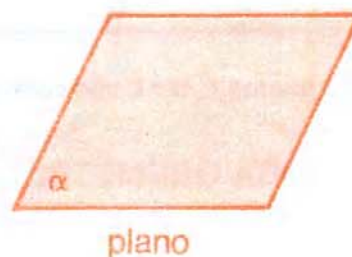
Você já tem uma idéia intuitiva sobre ponto, reta e plano.

Assim:

- Um furo de agulha num papel dá idéia de ponto.
- Uma corda bem esticada dá idéia de reta.
- O quadro-negro da sala de aula dá idéia de plano.

O ponto, a reta e o plano são **conceitos primitivos** no estudo da Geometria, isto é, não possuem definição.

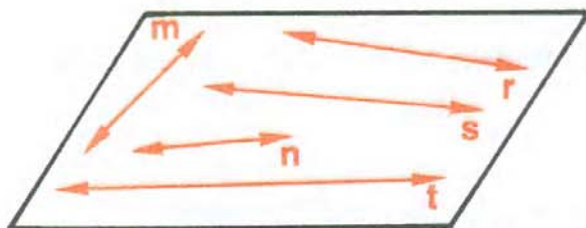
Representação:

- Ponto – letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, . . .
- Reta – letras minúsculas do nosso alfabeto: a, b, c, . . .
- Plano – letras gregas minúsculas: α, β, γ, . . .

Considerações importantes:

a) Numa reta há infinitos pontos.

r r

b) Num plano há infinitos pontos.

c) Num plano existem infinitas retas.

d) Por dois pontos distintos passa uma única reta.

Indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ uma reta que passa pelos pontos A e B.

PONTOS COLINEARES

Os pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados **colineares.**

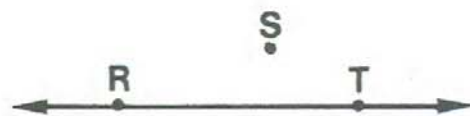
Os pontos A, B e C são colineares

Os pontos R, S e T não são colineares

FIGURA GEOMÉTRICA

- Toda **figura geométrica** é um conjunto de pontos.
- **Figura geométrica plana** é uma figura em que todos os seus pontos estão num mesmo plano.

Nota:

Neste livro, só estudaremos as figuras geométricas planas.

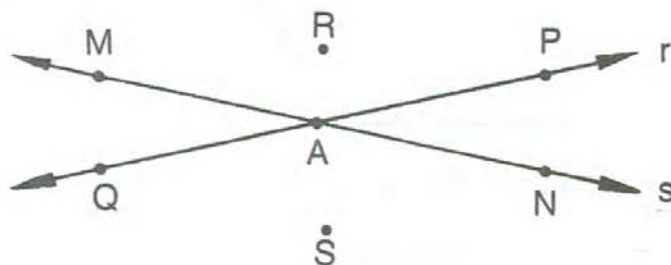
EXERCÍCIOS

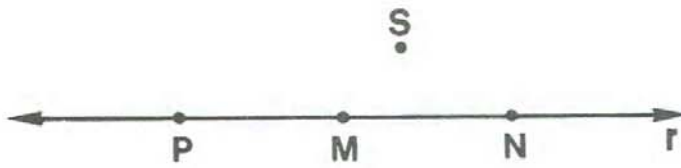
1) Quais são os elementos fundamentais da Geometria?
Ponto, reta e plano.

2) Que idéia (ponto, reta ou plano) você tem quando observa:
   a) A cabeça de um alfinete. *Ponto.*
   b) O piso da sala de aula. *Plano.*
   c) Um grão de areia. *Ponto.*
   d) Um campo de futebol. *Plano.*
   e) O encontro de duas paredes. *Reta.*
   f) Uma corda de violão bem esticada. *Reta.*

3) Responda:
   a) Quantos pontos podemos marcar num plano? *Infinitos.*
   b) Quantas retas podemos traçar num plano? *Infinitas.*
   c) Por dois pontos distintos quantas retas podemos traçar? *Uma única.*

4) Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?
   ■ a) Três pontos podem pertencer a uma mesma reta.
   b) Três pontos distintos são sempre colineares.
   c) A reta é um conjunto de dois pontos.
   ■ d) Por dois pontos distintos passa uma só reta.
   ■ e) Figura geométrica é qualquer conjunto não-vazio de pontos.

5) Observe a figura e responda:

   a) Quais dos pontos pertencem à reta r? *P, A e Q*
   b) Quais dos pontos pertencem à reta s? *M, A e N*
   c) Quais dos pontos pertencem às retas r e s? *A*

6) Observe a figura e responda:

a) Quais os pontos que pertencem à reta r? P, M e N

b) Os pontos P, M e N são colineares? Sim

c) Os pontos P, M e S pertencem à reta r? Não

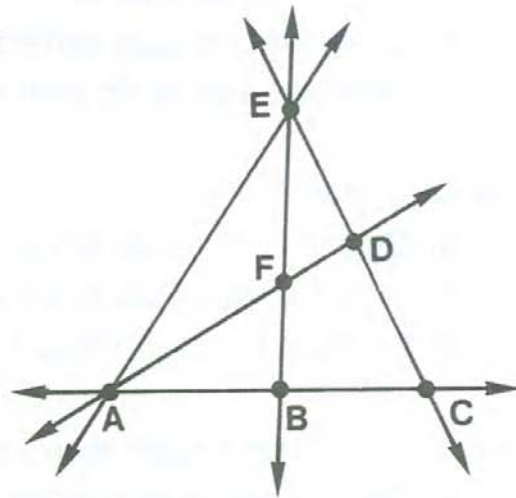
d) Os pontos P, M e S são colineares? Não

7) Observe a figura e complete no seu caderno:

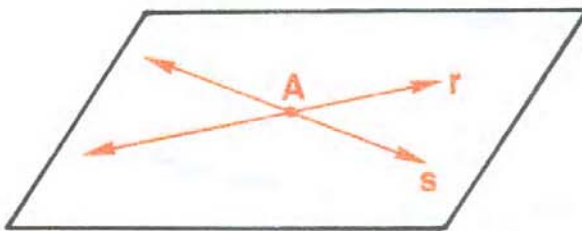
a) Os pontos A, F e .D. são colineares.

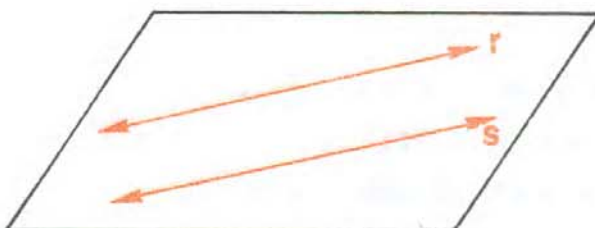
b) Os pontos E, F e .B são colineares.

c) Os pontos C, .D e E são colineares.

d) Os pontos .A, B e C são colineares.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS NO PLANO

Duas retas distintas contidas em um plano podem ser:

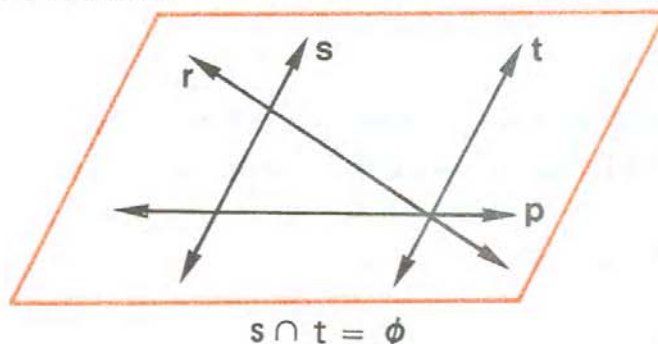
a) **retas concorrentes:** quando têm um único ponto comum.

$r \cap s = \{A\}$

b) **retas paralelas:** quando não têm ponto comum.

$r \cap s = \phi$

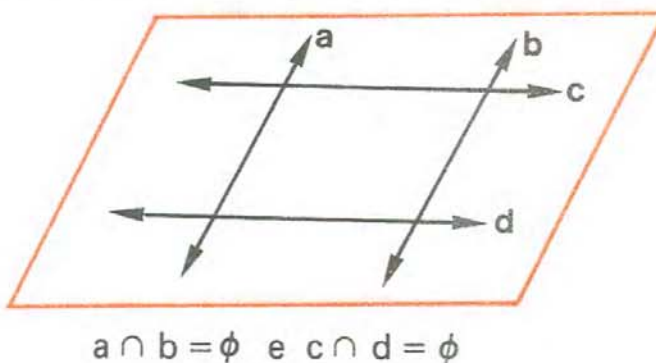
EXERCÍCIOS

1) Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

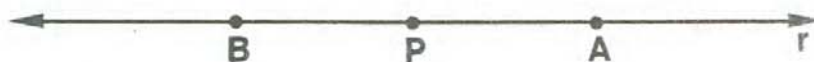
$s \cap t = \phi$

- ■ a) r e s são concorrentes
- ■ b) r e t são concorrentes
- ■ c) s e t são paralelas
- d) s e p são paralelas

2) Observe a figura e classifique os pares de retas em paralelas ou concorrentes:

$a \cap b = \phi$ e $c \cap d = \phi$

a) a e b *Paralelas*
b) a e c *Concorrentes*
c) d e b *Concorrentes*
d) b e c *Concorrentes*
e) c e d *Paralelas*

SEMI-RETA

Um ponto P qualquer de uma reta r divide esta reta em duas partes denominadas semi-retas de origem P.

Para distinguir as semi-retas, vamos marcar os pontos A e B pertencentes a cada semi-reta.

Na figura você tem:

$\overrightarrow{PA}$ – semi-reta de origem P e que passa pelo ponto A.

$\overrightarrow{PB}$ – semi-reta de origem P e que passa pelo ponto B.

SEGMENTO

Um segmento de reta de extremidades A e B é o conjunto dos pontos que estão entre elas, incluindo as extremidades.

Indica-se o segmento AB por $\overline{AB}$.

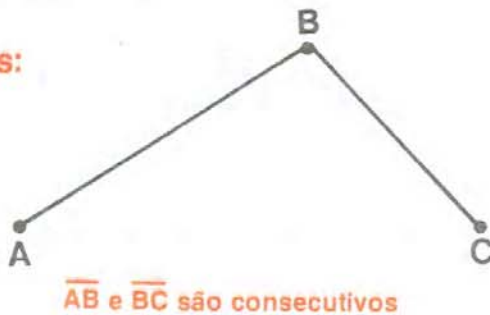
Nota: Entre as extremidades de um segmento há infinitos pontos.

SEGMENTOS CONSECUTIVOS

Dois segmentos de reta que têm uma extremidade comum são chamados **consecutivos.**

Exemplos:

$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

$\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são consecutivos

SEGMENTOS COLINEARES

Dois segmentos de reta são colineares se estão numa mesma reta.

Exemplos:

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares

$\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são colineares (e consecutivos)

SEGMENTOS CONGRUENTES

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem medidas iguais.

Indicação:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Significa: $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Um ponto M é chamado ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ se M está entre A e B e $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

EXERCÍCIOS

1) Observe a figura e responda:

a) Quantas semi-retas o ponto A determina? Quais são? *Duas, $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{AR}$*

b) Qual a origem da semi-reta $\overrightarrow{AS}$? *A*

c) Qual a origem da semi-reta $\overrightarrow{AR}$? *A*

2) Observe a figura e responda:

a) A reta tem origem? *Não.*

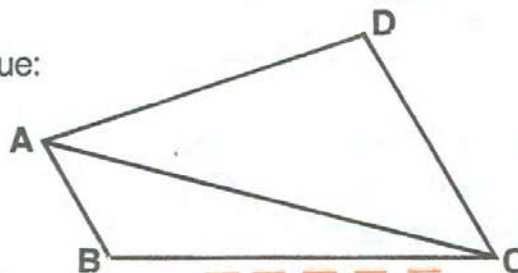
b) A semi-reta tem origem? *Sim.*

c) O segmento tem origem? *Sim.*

d) A reta tem extremidade? *Não.*

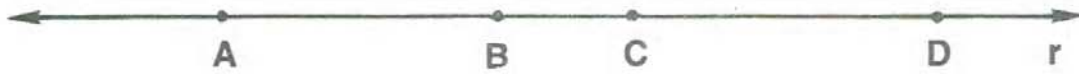
e) A semi-reta tem extremidade? *Não.*

f) O segmento tem extremidade? *Sim*

3) Observe a figura e identifique:

a) Cada segmento mostrado na figura. *$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$*

b) Os segmentos que se encontram em A. *$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$*

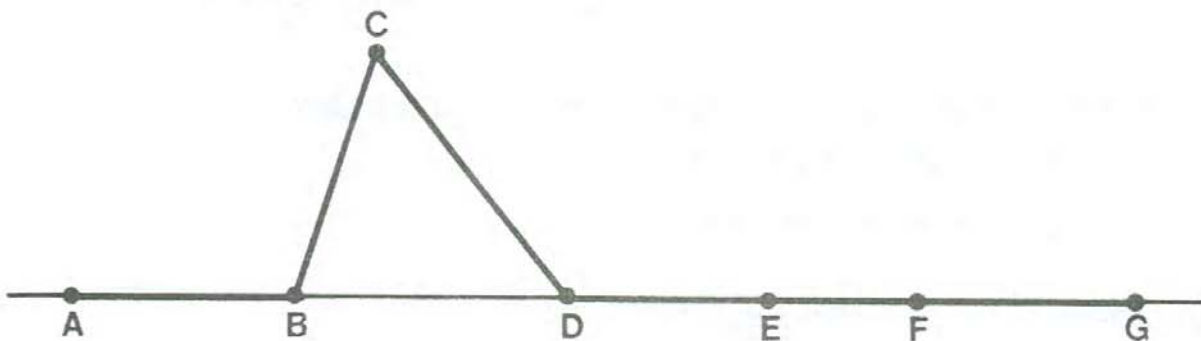
c) O ponto de intersecção de $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$. *D*

4) Considerando a figura, determine:

a) $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ *$\overline{AC}$*

b) $\overline{AB} \cap \overline{AC}$ *$\overline{AB}$*

c) $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ *$\varnothing$*

d) $\overline{AB} \cap \overline{BC}$ *$\{B\}$*

5) Observe a figura abaixo e escreva se os segmentos são consecutivos, colineares ou adjacentes (consecutivos e colineares):

a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ *Consecutivos*

b) $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ *Colineares*

c) $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ *Consecutivos*

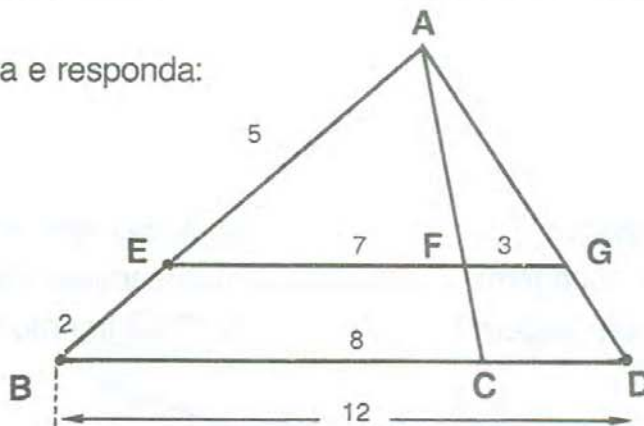
d) $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ *Consecutivos*

e) $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ *Colineares*

f) $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ *Adjacentes*

g) $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ *Adjacentes*

h) $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ *Colineares*

6) Observe a figura e responda:

a) Qual a medida do segmento $\overline{EG}$? *10*

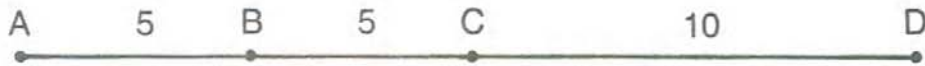
b) Qual a medida do segmento $\overline{AB}$? *7*

c) Qual a medida do segmento $\overline{CD}$? *4*

7) A medida de um segmento é o dobro da medida de outro. Qual é a medida de cada segmento, se a soma das medidas dos dois segmentos é 15cm?

$x + 2x = 15$ *Resp.: 5 cm e 10 cm*

8) Observe a figura e responda:

A 5 B 5 C 10 D

a) Qual é o ponto médio de $\overline{AC}$? *B*

b) Qual é o ponto médio de $\overline{AD}$? *C*

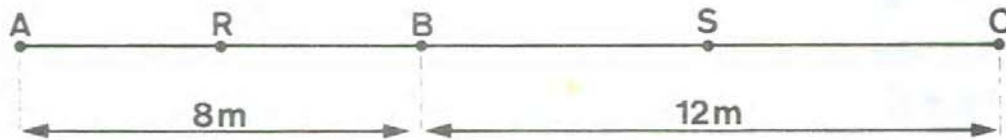
9) Na figura abaixo, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$. Se $\overline{AB}$ mede 6 cm e $\overline{BC}$ mede 4 cm

a) Qual é a medida de $\overline{AM}$? *3 cm*

b) Qual é a medida de $\overline{BN}$? *2 cm*

c) Qual é a medida de $\overline{MN}$? *5 cm*

d) Qual é a medida de $\overline{AN}$? *8 cm*

10) Na figura, R é ponto médio de $\overline{AB}$ e S é ponto médio de $\overline{BC}$.

Determine as seguintes medidas:

a) AR *4 cm*

b) RB *4 cm*

c) BS *6 cm*

d) SC *6 cm*

e) RS *10 cm*

f) AS *14 cm*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Escreva o que significam as seguintes indicações:

a) $\overleftrightarrow{RS}$ *Reta*

b) $\overrightarrow{RS}$ *Semi-reta*

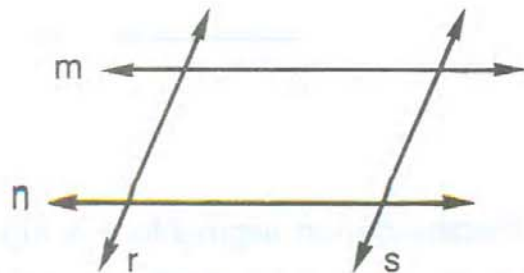
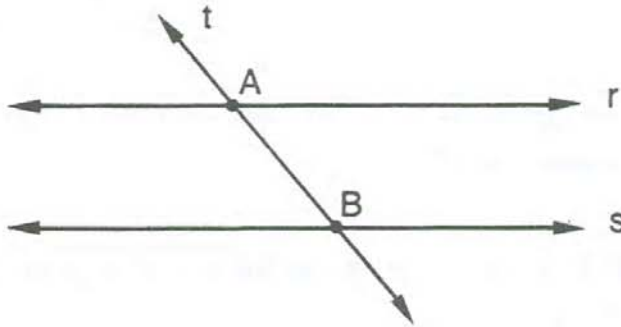
c) $\overline{RS}$ *Segmento*

2) Observe a figura e identifique:

a) os pares de retas paralelas.

*a) **r e s, m e n***

b) os pares de retas concorrentes.

*b) **m e r, m e s, n e r, n e s***

3) As retas r e s da figura são paralelas.

Responda:

a) Qual a intersecção das retas r e s? ∅

b) Qual a intersecção das retas r e t? {A}

c) Qual a intersecção das retas s e t? {B}

4) Desenhe a figura no seu caderno e indique os pontos de intersecção de modo que:

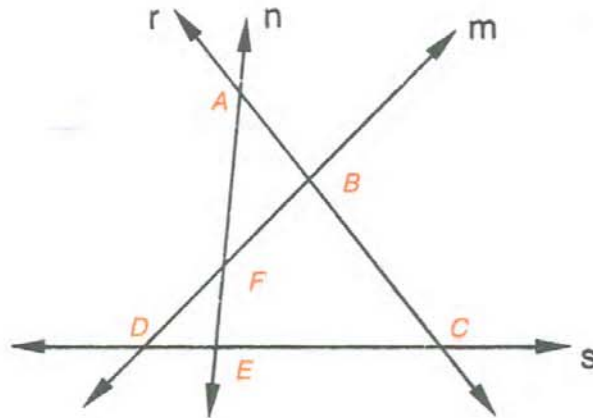
a) $r \cap n = A$

b) $r \cap m = B$

c) $r \cap s = C$

d) $s \cap m = D$

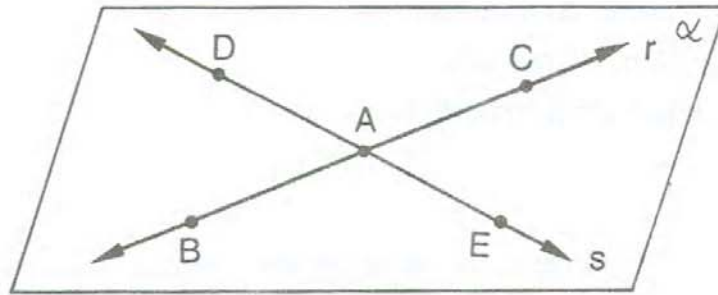
e) $s \cap n = E$

f) $m \cap n = F$

5) Na figura abaixo, o segmento $\overline{AC}$ mede 16 cm e $\overline{AB}$ mede 11,75 cm. Qual a medida do segmento $\overline{BC}$?

Resp.: 4,25 cm

6) A medida de um segmento é o triplo da medida de outro. Qual a medida de cada segmento, se a soma das medidas dos dois segmentos é 13,6 cm?

$x + 3x = 13,6$ Resp.: 3,4 cm e 10,2 cm

7) Observe a figura e responda:

a) Os pontos D, A e E são colineares? *Sim.*

b) Os pontos B, A e C são colineares? *Sim.*

c) Os pontos C, A e E são colineares? *Não.*

TESTES

1) Os conceitos primitivos da Geometria são:

a) ponto, segmento e reta.

b) ponto, segmento e plano.

c) ponto, reta e semi-reta.

■ d) ponto, reta e plano.

2) Sendo r e s retas concorrentes, podemos afirmar que o conjunto $r \cap s$ é:

■ a) unitário

b) vazio

c) infinito

d) n.d.a.

3) Sejam as afirmações:

I) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.

II) Duas retas distintas paralelas não têm ponto comum.

Associando V ou F a cada afirmação, temos:

■ a) V, V

b) V, F

c) F, V

d) F, F

4) Um segmento $\overline{MN}$ é um conjunto formado:

a) apenas pelo ponto M.

b) apenas pelos pontos M e N.

c) pelos pontos que estão entre M e N.

■ d) por infinitos pontos.

5) Os pontos A, B e C são colineares quando:

a) cada um pertencer a uma reta.
b) dois pertencerem a uma reta.
■ c) os três pertencerem à mesma reta.
d) n.d.a.

6) Os pontos R, S e T da figura ao lado determinam:

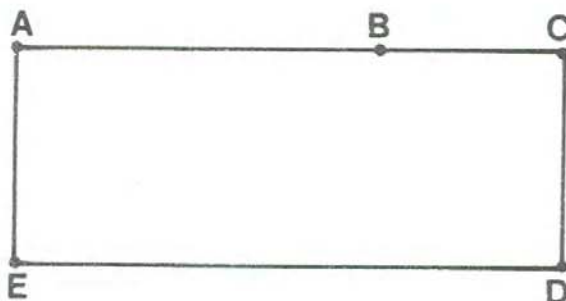
a) 2 segmentos de reta.
■ b) 3 segmentos de reta.
c) 4 segmentos de reta.
d) 5 segmentos de reta.

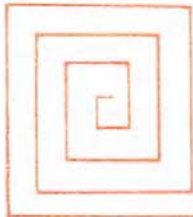
7) Dois segmentos que têm a mesma medida são chamados:

a) colineares
b) consecutivos
c) equivalentes
■ d) congruentes

8) Se dois segmentos não pertencem a uma mesma reta e têm uma extremidade comum, eles são:

a) colineares
■ b) consecutivos
c) congruentes
d) adjacentes

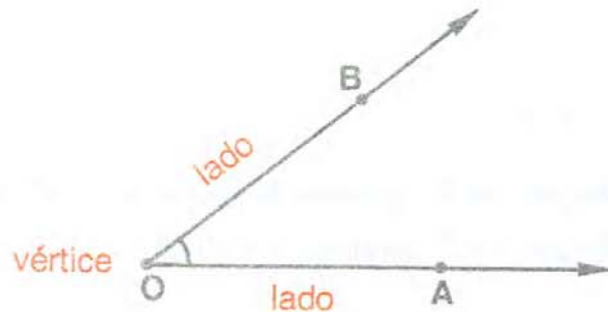
9) Na figura abaixo, são consecutivos e colineares os segmentos:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$
b) $\overline{AE}$ e $\overline{ED}$
■ c) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$
d) $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$

14

ÂNGULOS

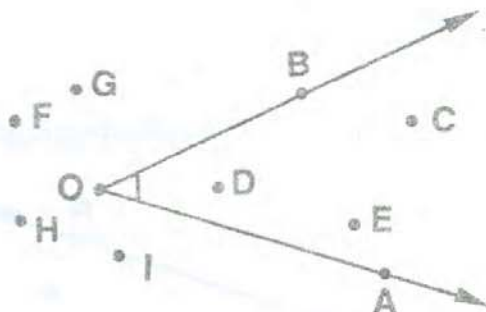
DEFINIÇÃO

Ângulo é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não-colineares.

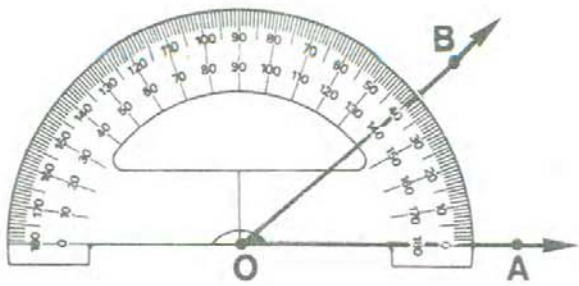
Na figura:

- O é o vértice.
- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados.

Indicação do ângulo: AÔB, ou BÔA ou simplesmente Ô.

PONTOS INTERNOS E PONTOS EXTERNOS A UM ÂNGULO

Seja o ângulo AÔB

- Os pontos C, D e E são alguns dos pontos internos ao ângulo AÔB.
- Os pontos F, G, H e I são alguns dos pontos externos ao ângulo AÔB.

MEDIDA DE UM ÂNGULO

Um ângulo pode ser medido através de um instrumento chamado **transferidor** e que tem o **grau** como unidade. O ângulo AÔB da figura mede 40 graus.

Indicação:
m (AÔB) = 40°

A unidade grau tem dois submúltiplos: **minuto** e **segundo**.

> 1 grau tem 60 minutos (indicação: 1° = 60')
> 1 minuto tem 60 segundos (indicação: 1' = 60")

Simbolicamente:

- Um ângulo de 25 graus e 40 minutos é indicado por 25° 40'.
- Um ângulo de 12 graus, 20 minutos e 45 segundos é indicado por 12° 20' 45".

EXERCÍCIOS

1) Dê a indicação, o vértice e os lados dos ângulos:

a)

b)

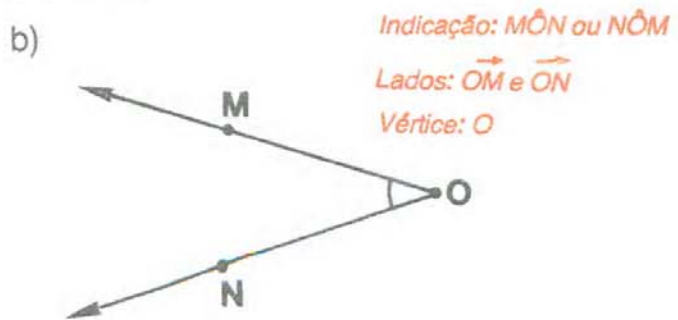
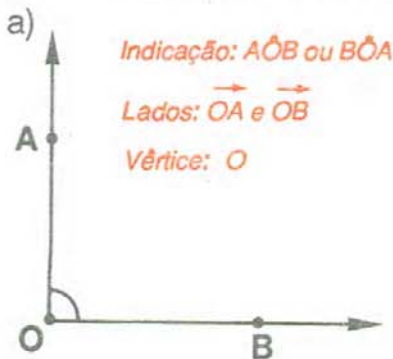
Indicação: MÔN ou NÔM

Lados: $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$

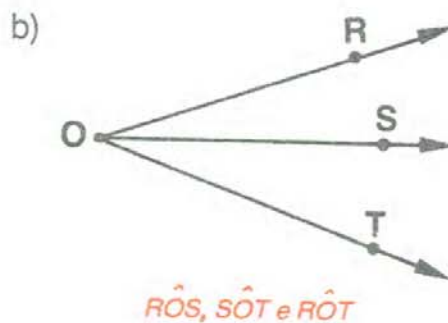
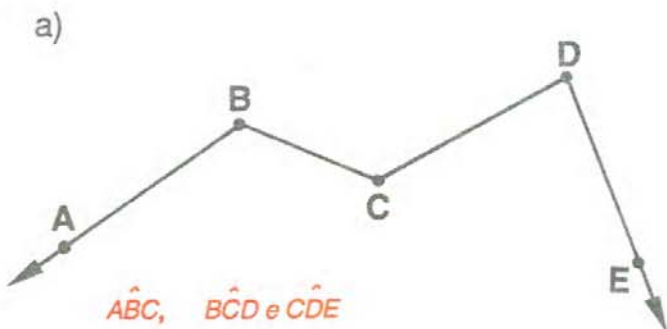
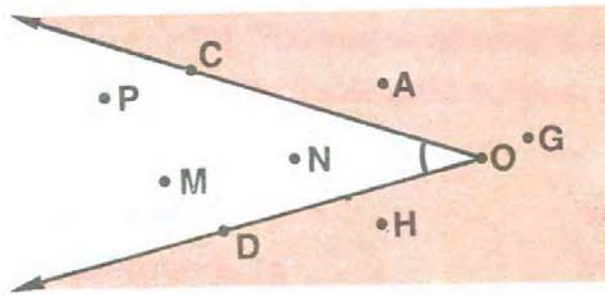
Vértice: O

M

O

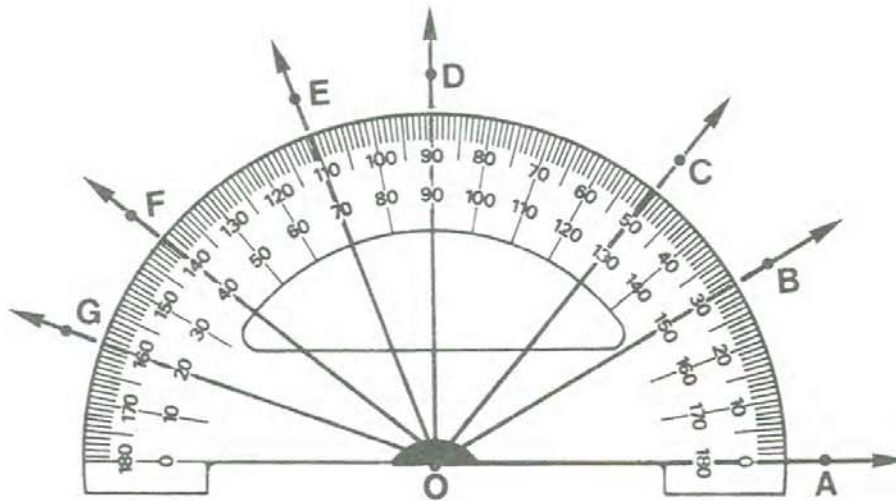
N

2) Em cada uma das figuras abaixo há três ângulos. Quais são esses ângulos?

a)

b)

3) Observe os pontos assinalados e responda:

a) Quais pontos estão no interior do ângulo? *P, M e N*

b) Quais pontos estão no exterior do ângulo? *A, G e H*

c) Quais pontos pertencem aos lados do ângulo? *C, O e D*

4) Escreva as medidas em graus dos ângulos indicados pelo transferidor:

a) m (AÔB) *30°*

b) m (AÔC) *50°*

c) m (AÔD) *90°*

d) m (AÔE) *110°*

e) m (AÔF) *140°*

f) m (AÔG) *160°*

5) Escreva simbolicamente:

a) 30 graus *30°*

b) 10 graus e 25 minutos *10° 25'*

c) 42 graus e 54 minutos *42° 54'*

d) 15 graus, 20 minutos e 40 segundos *15° 20' 40"*

e) 54 graus, 38 minutos e 12 segundos *54° 38' 12"*

6) Responda:

a) Um grau é igual a quantos minutos? 60'

b) Um minuto é igual a quantos segundos? 60"

c) Um grau é igual a quantos segundos? 3600"

7) Transforme:

a) 1° em minutos 60'

b) 2° em minutos 120'

c) 3° em minutos 180'

d) 4° em minutos 240'

e) 5° em minutos 300'

f) 1' em segundos 60"

g) 2' em segundos 120"

h) 3' em segundos 180"

i) 4' em segundos 240"

j) 5' em segundos 300"

8) Transforme em minutos, observando o exemplo resolvido:

Resolvido. 2° 17' = 2 × 60' + 17' = 137'

a) 5° 7' 307'

b) 3° 20' 200'

c) 10° 35' 635'

d) 12° 18' 738'

e) 3° 45' 225'

f) 5° 54' 354'

g) 7° 12' 432'

h) 9° 36' 576'

9) Transforme:

120' = 120 : 60 = 2° ⬅ **Resolvidos** ➡ 120" = 120" : 60 = 2'

a) 180' em graus 3°

b) 240' em graus 4°

c) 300' em graus 5°

d) 360' em graus 6°

e) 180" em minutos 3'

f) 240" em minutos 4'

g) 300" em minutos 5'

h) 360" em minutos 6'

10) Transforme em graus e minutos:

Resolvido. 75' = 1° 15' — Divida os minutos por 60 para obter os graus. O resto, se existir, serão os minutos.

a) 90' 1° 30'

b) 95' 1° 35'

c) 130' 2° 10'

d) 150' 2° 30'

e) 385' 6° 25'

f) 512' 8° 32'

g) 867' 14° 27'

h) 1000' 16° 40'

11) Transforme em minutos e segundos:

a) 97" *1' 37"*
b) 130" *2' 10"*
c) 150" *2' 30"*
d) 162" *2' 42"*
e) 185" *3' 5"*
f) 254" *4' 14"*

12) Copie e complete:

a) 40° = 39° ..*60'*
b) 70° = 69° ..*60'*
c) 84° = 83° ..*60'*
d) 90° = 89° ..*60'*
e) 150° = 149° ..*60'*
f) 180° = 179° ..*60'*

13) Escreva as medidas na forma mais simples:

Resolvido. 27° 60' = 28°

a) 29° 60' *30°*
b) 34° 60' *35°*
c) 72° 60' *73°*
d) 99° 60' *100°*
e) 54° 60' *55°*
f) 108° 60' *109°*

14) Escreva as medidas na forma mais simples:

Resolvido. 39° 75' = 40° 15'

a) 30° 80' *31° 20'*
b) 45° 90' *46° 30'*
c) 57° 100' *58° 40'*
d) 73° 110' *74° 50'*
e) 20° 120' *22°*
f) 25° 150' *27° 30'*
g) 42° 160' *44° 40'*
h) 78° 170' *80° 50'*

OPERAÇÕES COM MEDIDAS DE ÂNGULOS

1) ADIÇÃO

1 Observe os exemplos:

17° 15' 10" + 30° 20' 40"

```
  17° 15' 10"
+ 30° 20' 40"
-------------
  47° 35' 50"
```

❷ $13° 40' + 30° 45'$

$$\begin{array}{r} 13° 40' \\ +\ 30° 45' \\ \hline 43° 85' \\ 1° 25' \\ \hline 44° 25' \end{array}$$

EXERCÍCIOS

Calcule as somas:

a) $49° + 65°$ 114°
b) $12° 25' + 40° 13'$ 52° 38'
c) $28° 12' + 52° 40'$ 80° 52'
d) $58° + 17° 19'$ 75° 19'
e) $41° 58' + 16°$ 57° 58'
f) $25° 40' + 16° 50'$ 42° 30'
g) $23° 35' + 12° 45'$ 36° 20'
h) $21° 15' 40'' + 7° 12' 5''$ 28° 27' 45"
i) $35° 10' 50'' + 10° 25' 20''$ 45° 36' 10"
j) $31° 45' 50'' + 13° 20' 40''$ 55° 06' 30"
l) $3° 24' 9'' + 37° 11' 33''$ 40° 35' 42"
m) $35° 35' 2'' + 22° 24' 58''$ 58°

2) SUBTRAÇÃO

Observe os exemplos:

❶ $58° 40' - 17° 10'$

$$\begin{array}{r} 58° 40' \\ -\ 17° 10' \\ \hline 41° 30' \end{array}$$

❷ $80° - 42° 30'$

$$\begin{array}{r} 79° 60' \\ -\ 42° 30' \\ \hline 37° 30' \end{array}$$

EXERCÍCIOS

Calcule as diferenças:

a) $42° - 17°$ 25°
b) $172° - 93°$ 79°
c) $48° 50' - 27° 10'$ 21° 40'
d) $42° 35' - 13° 15'$ 29° 20'
e) $70° - 22° 30'$ 47° 30'
f) $30° - 18° 10'$ 11° 50'
g) $90° - 54° 20'$ 35° 40'
h) $120° - 50° 45'$ 69° 15'
i) $52° 30' - 20° 50'$ 31° 40'
j) $39° 1' - 10° 15'$ 28° 46'

3) MULTIPLICAÇÃO DE UM ÂNGULO POR UM NÚMERO

Observe os exemplos:

1. 17° 15' × 2

```
 17° 15'
 ×    2
--------
 34° 30'
```

2. 24° 20' × 3

```
 24° 20'
 ×    3
--------
 72° 60'
  1°
--------
 73°
```

EXERCÍCIOS

Calcule os produtos:

a) 25° 10' × 3 75° 30'

b) 44° 20' × 2 88° 40'

c) 35° 10' × 4 140° 40'

d) 16° 20' × 3 48° 60' = 49°

e) 28° 30' × 2 56° 60' = 57°

f) 12° 40' × 3 36° 120' = 38°

g) 15° 30' × 3 45° 90' = 46° 30'

h) 14° 20' × 5 70° 100' = 71° 40'

4) DIVISÃO DE UM ÂNGULO POR UM NÚMERO

Observe os exemplos:

1. 36° 30' : 3

```
36° 30' | 3
 0   0    12° 10'
```

2. 39° 20' : 4

```
39° 20'   | 4
 3° 180'    9° 50'
    200'
     00
```

EXERCÍCIOS

1) Calcule os quocientes:

a) 48° 20' : 4 12° 05'

b) 45° 30' : 3 15° 10'

c) 75° 50' : 5 15° 10'

d) 55° : 2 27° 30'

e) 90° : 4 22° 30'

f) 22° 40' : 5 4° 32'

2) Calcule:

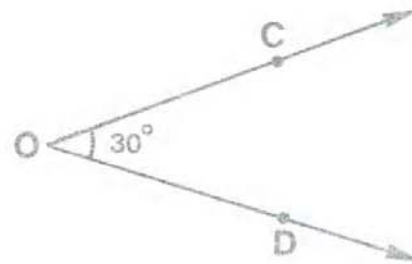
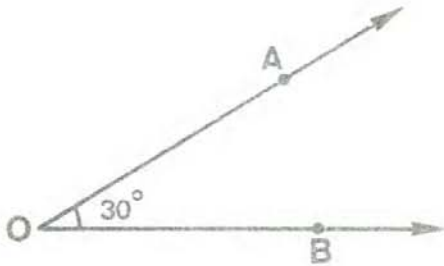
a) $\frac{2}{3}$ de 45° *30°*

b) $\frac{5}{7}$ de 84° *60°*

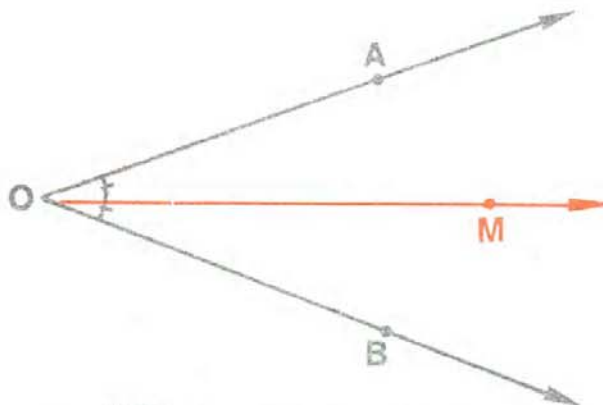
c) $\frac{3}{4}$ de 48° 20' *36° 15'*

d) $\frac{3}{2}$ de 15° 20' *23°*

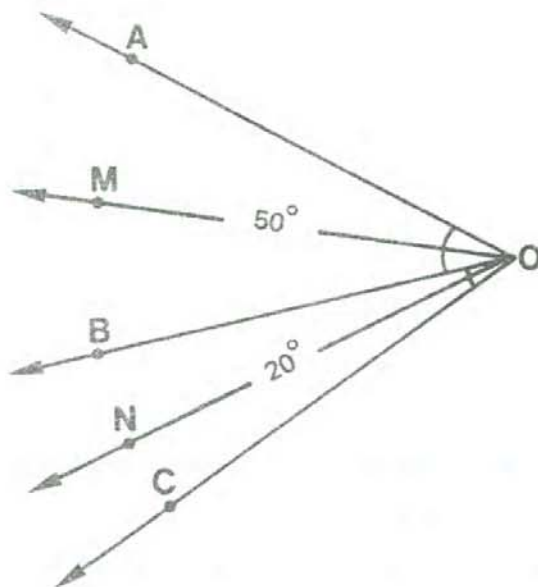
ÂNGULOS CONGRUENTES

Dois ângulos são **congruentes** se as suas medidas são iguais.

Indicação: AÔB ≅ CÔD (**significa:** AÔB é congruente a CÔD)

BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

Se AÔM ≅ MÔB, então $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de AÔB.

EXERCÍCIOS

1) Na figura, $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de AÔB e $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz de BÔC.

Responda:

a) Quanto mede o ângulo MÔA? *25°*

b) Quanto mede o ângulo NÔC? *10°*

c) Quanto mede o ângulo BÔN? *10°*

d) Quanto mede o ângulo MÔC? *45°*

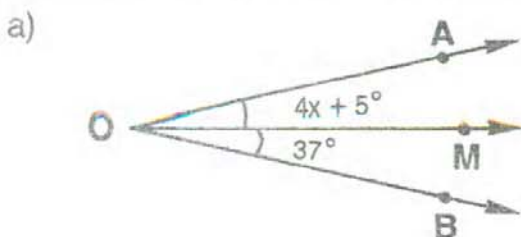
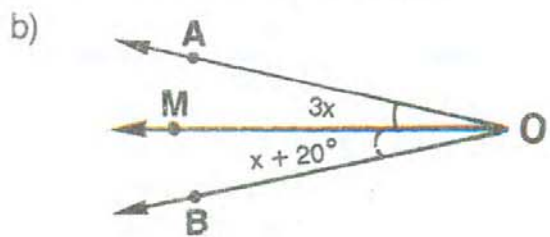
e) Quanto mede o ângulo AÔN? *60°*

f) Quanto mede o ângulo MÔN? *35°*

2) A semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo AÔB e a medida de AÔC é 19° 30'. Qual a medida de AÔB?

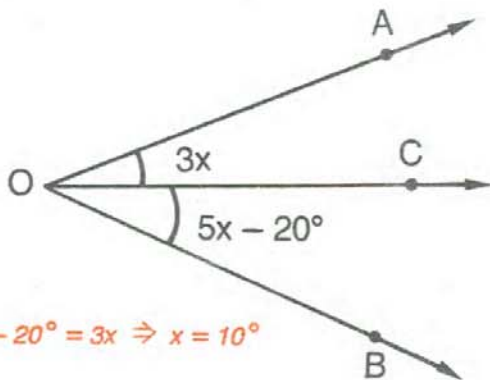
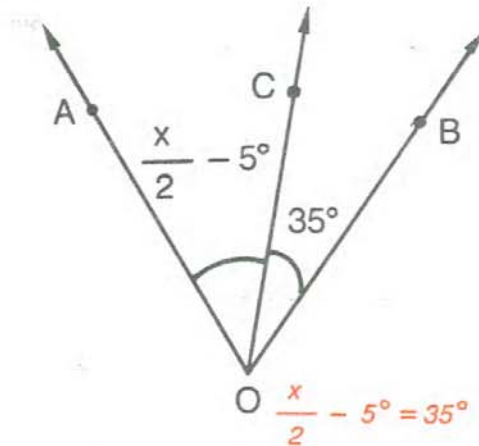
19° 30'
x 2
38°60' = 39°

Resp.: 39°

3) Calcule x em cada caso, sabendo-se que $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz do ângulo dado.

$4x + 5° = 37° \Rightarrow x = 8°$

$3x = x + 20° \Rightarrow x = 10°$

4) Calcule x em cada caso, sabendo-se que $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo dado.

a)

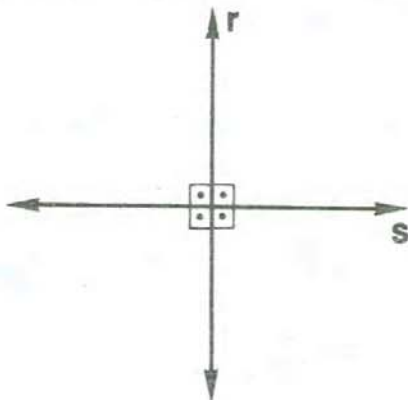
b)

ÂNGULOS RETO, AGUDO E OBTUSO

Os ângulos recebem nomes especiais de acordo com suas medidas:

- Ângulo reto é aquele cuja medida é 90°.
- Ângulo agudo é aquele cuja medida é menor que 90°.
- Ângulo obtuso é aquele cuja medida é maior que 90°.

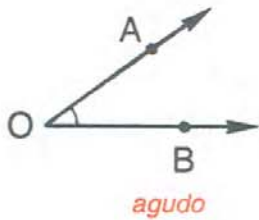
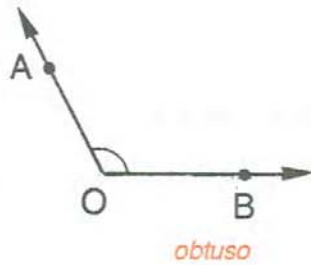
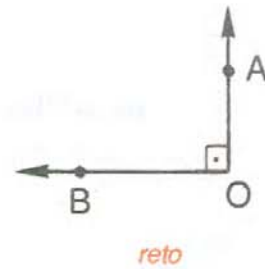
Nota: O símbolo ⊾ representa um ângulo reto.

RETAS PERPENDICULARES

Quando duas retas se interceptam formando ângulos retos, dizemos que elas são **perpendiculares.**

Indicação: r ⊥ s

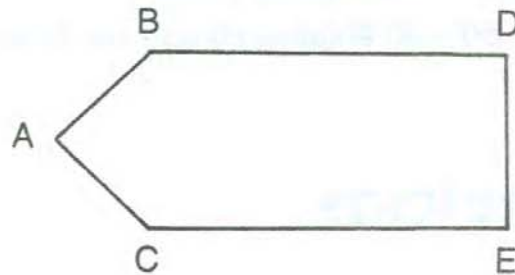
Significa: r perpendicular a s.

EXERCÍCIOS

1) Classifique os ângulos apresentados nas figuras em agudos, obtusos ou retos:

2) Identifique na figura:

a) os ângulos retos; $\hat{D}$ e $\hat{E}$

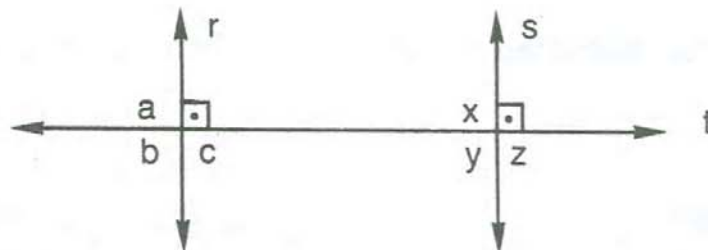
b) os ângulos obtusos; $\hat{B}$ e $\hat{C}$

c) os ângulos agudos. $\hat{A}$

3) Responda:

a) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 3 horas é um ângulo agudo, reto ou obtuso? *Reto.*

b) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2 horas é um ângulo agudo, reto ou obtuso? *Agudo.*

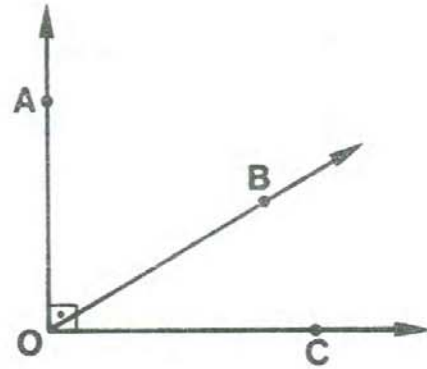
c) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5 horas é um ângulo agudo, reto ou obtuso? *Obtuso.*

4) Observe a figura e responda:

Qual o número de elementos do conjunto { a,b,c,x,y,z }?

$\{90°, 90°, 90°, 90°, 90°, 90°\} = \{90°\}$ *Resp.: 1*

ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos são **complementares** quando a soma de suas medidas é 90°.

m (AÔB) + m (BÔC) = m (AÔC)

Exemplos:

- 65° e 25° são ângulos complementares, porque 65° + 25° = 90°.
- 40° e 50° são ângulos complementares, porque 40° + 50° = 90°.

EXERCÍCIOS

1) Responda:

a) Um ângulo de 20° e um de 70° são complementares? *Sim.*

b) Um ângulo de 35° e um de 65° são complementares? *Não.*

c) Um ângulo de 73° e um de 27° são complementares? *Não.*

d) Um ângulo de 58° e um de 32° são complementares? *Sim.*

2) Calcule o complemento dos seguintes ângulos:

a) 34° *(56°)*

b) 72° *(18°)*

c) 84° *(6°)*

d) 18° 25' *(71° 35')*

e) 40° 30' *(49° 30')*

f) 51° 20' *(38° 40')*

3) Resolva as equações abaixo, onde a incógnita x é um ângulo (medido em graus):

a) $2x = 90°$ *(x = 45°)*

b) $x + 17° = 90°$ *(x = 73°)*

c) $4x + 10° = 90°$ *(x = 20°)*

d) $x + 8x = 90°$ *(x = 10°)*

e) $5x - 20° = 1° + 2x$ *(x = 7°)*

f) $x = 2(90° - x)$ *(x = 60°)*

g) $4(x + 3°) = 20°$ *(x = 2°)*

h) $(3x - 20°) + 50° = 90°$ *(x = 20°)*

i) $3(x + 1°) = 2(x + 7°)$ *(x = 11°)*

j) $2x + 2(x + 1°) = 4° + 3(x + 2°)$ *(x = °)*

4) Determine x, sabendo que os ângulos são complementares:

a)

d)

b)

e)

c)

f)

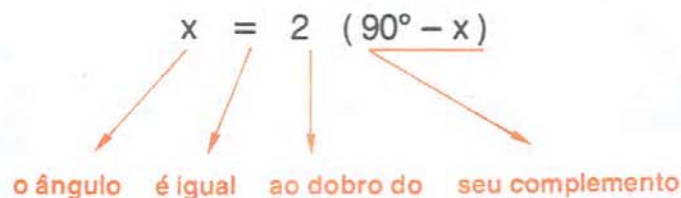
5) Dado um ângulo de medida x, indicar :

a) o seu complemento. $(90° - x)$
b) o dobro do seu complemento. $2 \cdot (90° - x)$
c) o triplo do seu complemento. $3 \cdot (90° - x)$
d) a metade do seu complemento. $\frac{90° - x}{2}$
e) a terça parte do seu complemento. $\frac{90° - x}{3}$

6) Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual ao dobro do seu complemento.

Solução:

Medida do ângulo = x

Medida do complemento do ângulo = 90° – x

$$x = 2\ (90° - x)$$

Resolvendo a equação:

$$x = 2\ (90° - x)$$
$$x = 180° - 2x$$
$$x + 2x = 180°$$
$$3x = 180°$$
$$x = 60°$$

Resposta: 60°

7) A medida de um ângulo é igual à medida de seu complemento. Quanto mede esse ângulo ? *$x = 90° - x$* *Resp.: 45°*

8) A medida de um ângulo é a metade da medida do seu complemento. Calcule a medida desse ângulo. *$x = \frac{90° - x}{2}$* *Resp.: 30°*

9) Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual ao triplo de seu complemento. *$x = 3\ (90° - x)$* *Resp.: 67° 30'*

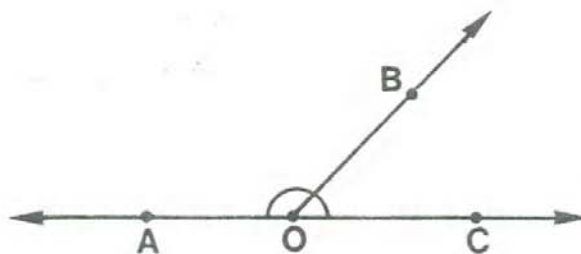
10) A diferença entre o dobro da medida de um ângulo e o seu complemento é 45°. Calcule a medida desse ângulo. *$2x - (90° - x) = 45°$* *Resp.: 45°*

11) A terça parte do complemento de um ângulo mede 20°. Qual a medida do ângulo? *$\frac{90° - x}{3} = 20°$* *Resp.: 30°*

12) Dois ângulos complementares têm suas medidas expressas em graus por 3x + 25° e 4x – 5°. Quanto medem esses ângulos?
$(3x + 25°) + (4x - 5°) = 90° \Rightarrow x = 10°$ *Resp.: 55° e 35°*

ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas é 180°.

m (AÔB) + m (BÔC) = 180°

Exemplos:

- 50° e 130° são ângulos suplementares, porque 50° + 130° = 180°
- 125° e 55° são ângulos suplementares, porque 125° + 55° = 180°

EXERCÍCIOS

1) Responda:

a) Um ângulo de 70° e um de 110° são suplementares? *Sim.*

b) Um ângulo de 155° e um de 25° são suplementares? *Sim.*

2) Calcule o suplemento dos seguintes ângulos:

a) 30° *(150°)*

b) 85° *(95°)*

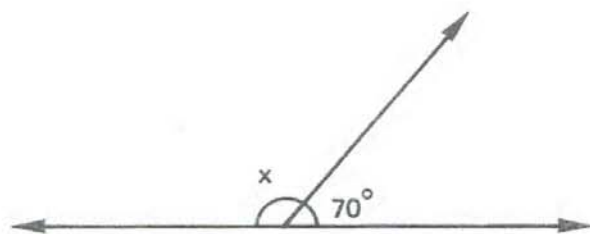
c) 72° *(108°)*

d) 132° 30' *(47° 30')*

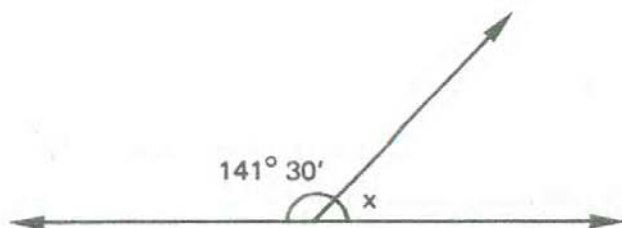
e) 140° 20' *(39° 40')*

f) 151° 40' *(28° 20')*

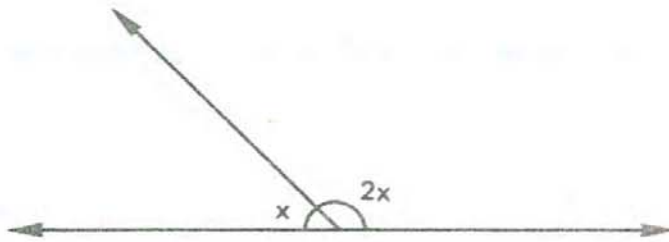
3) Determine x, sabendo que os ângulos são suplementares:

a)

x + 70° = 180°

x = 110°

b)

x + 141° 30' = 180°

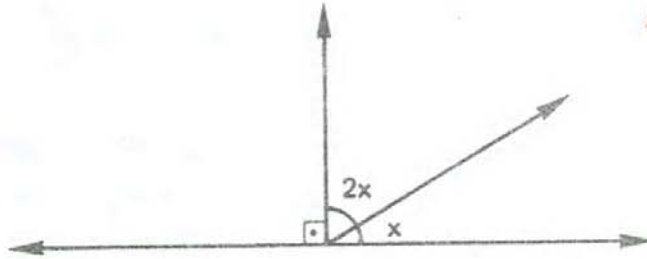
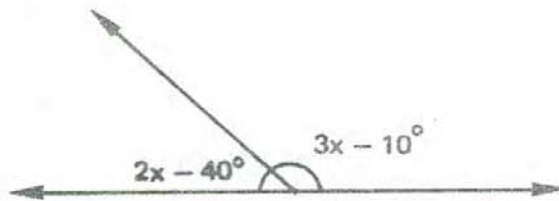
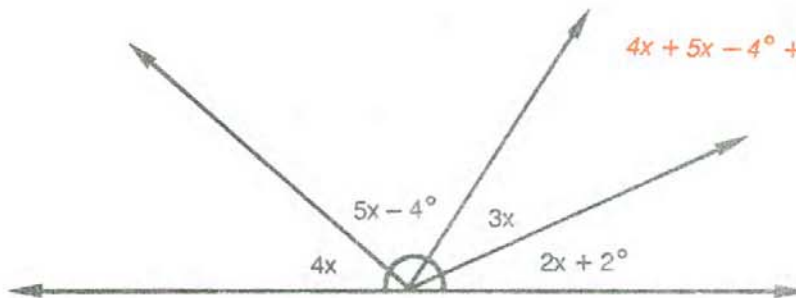
x = 38° 30'

4) Determine x, sabendo que os ângulos são suplementares:

a)

$x + 2x = 180°$
$3x = 180°$
$x = 60°$

b)

$x + 2x + 90° = 180°$
$3x = 90°$
$x = 30°$

c)

$2x - 40° + 3x - 10° = 180°$
$5x = 230°$
$x = 46°$

5) Calcule x:

$4x + 5x - 4° + 3x + 2x + 2° = 180°$
$14x = 182°$
$x = 13°$

6) A quarta parte da medida de um ângulo mede 30°. Calcule a medida do seu suplemento. $\frac{x}{4} = 30° \Rightarrow x = 120°$ *Resp.: 60°*

7) A medida de um ângulo é igual à medida de seu suplemento. Calcule esse ângulo. $x = 180° - x$ *Resp.: 90°*

8) Calcule a medida de um ângulo que é igual ao triplo de seu suplemento.
$x = 3(180° - x)$ *Resp.: 135°*

9) O dobro da medida de um ângulo é igual à medida do suplemento desse ângulo. Calcule a medida do ângulo. $2x = 180° - x$ *Resp.: 60°*

10) O triplo da medida de um ângulo mais a medida do suplemento desse ângulo é 250°. Calcule a medida do ângulo. $3x + (180° - x) = 250°$ Resp.: 35°

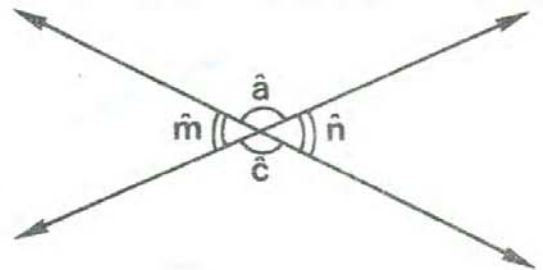
11) Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual a $\frac{2}{3}$ do seu suplemento. $x = \frac{2}{3}(180° - x)$ Resp.: 72°

12) A soma do complemento com o suplemento de um ângulo é 110°. Quanto mede o ângulo? $(90° - x) + (180° - x) = 110°$ Resp.: 80°

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice.

Na figura:

- â e ĉ são opostos pelo vértice.
- m̂ e n̂ são opostos pelo vértice.

TEOREMA*

> Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Prova:

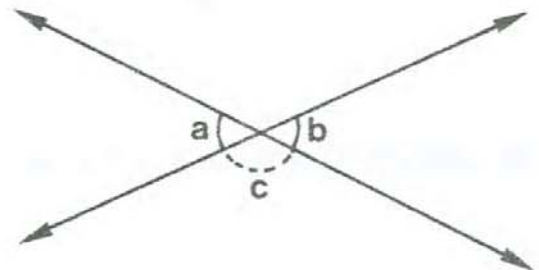
Sejam os ângulos a e b opostos pelo vértice.

❶ $m(\hat{a}) + m(\hat{c}) = 180°$

❷ $m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180°$

Comparando ❶ e ❷ :

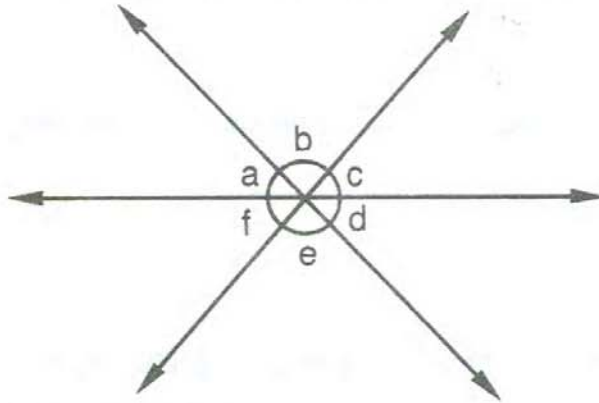
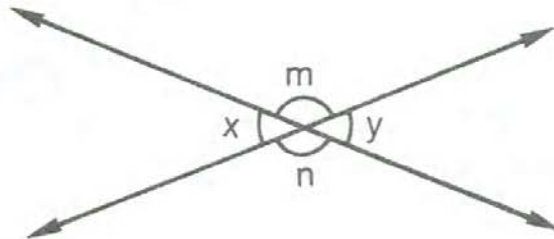
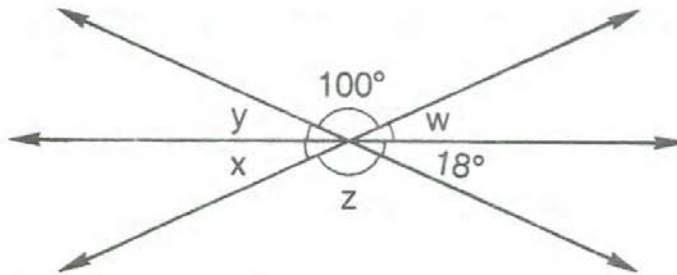
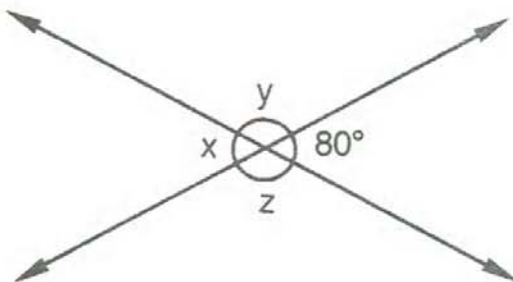
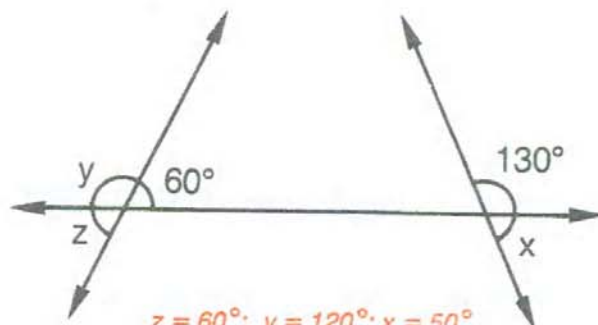
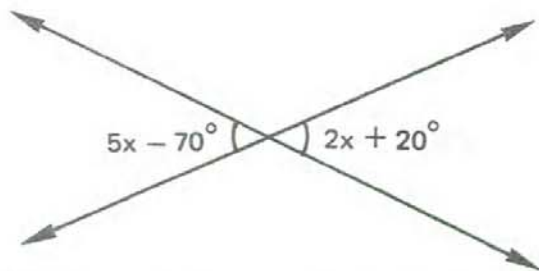
$m(\hat{a}) + \cancel{m}(\hat{c}) = m(\hat{b}) + \cancel{m}(\hat{c})$

$$m(\hat{a}) = m(\hat{b})$$

Se â e b̂ têm a mesma medida, eles são congruentes.

---

* **Teoremas** – Sentenças que são aceitas como verdadeiras, mediante uma demonstração ou prova.

EXERCÍCIOS

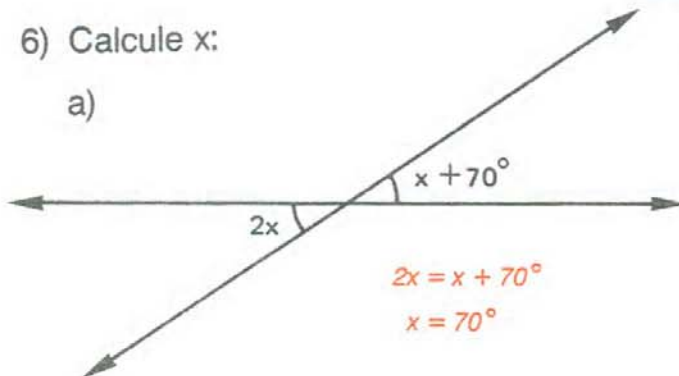
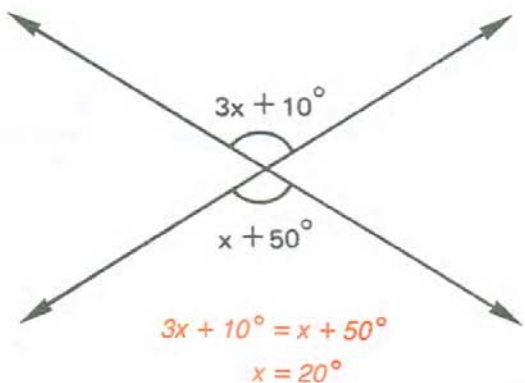
1) Quais são os 3 pares de ângulos opostos pelo vértice?

2) Se x = 50°, determine y, m e n:

3) Calcule os ângulos x, y, z e w da figura:

4) Calcule os ângulos x, y e z das figuras:

5) Calcule x:

Solução:

$5x - 70° = 2x + 20°$

$5x - 2x = 20° + 70°$

$3x = 90°$

$x = 30°$

6) Calcule x:

a)

$2x = x + 70°$

$x = 70°$

b)

$3x + 10° = x + 50°$

$x = 20°$

7) Calcule x:

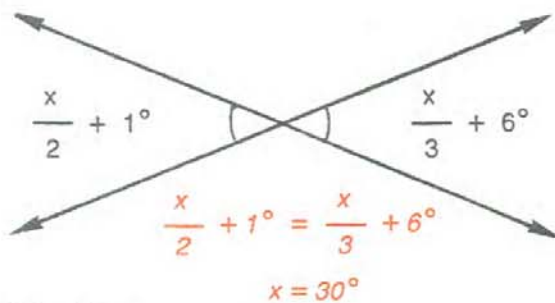
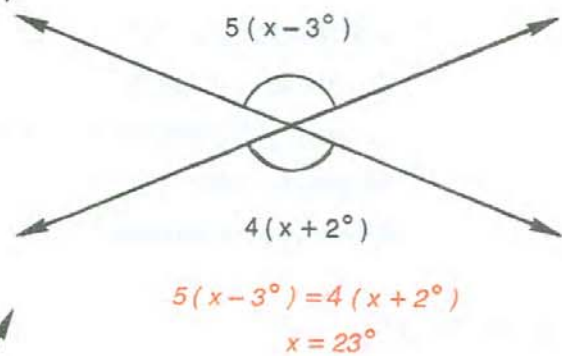
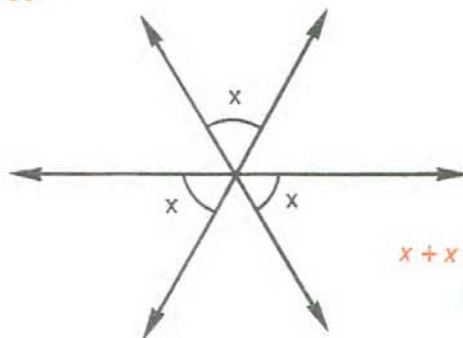
a)

$\frac{x}{2} + 1° = \frac{x}{3} + 6°$

$x = 30°$

b)

$5(x - 3°) = 4(x + 2°)$

$x = 23°$

8) Calcule x:

$x + x + x + x + x + x = 180°$

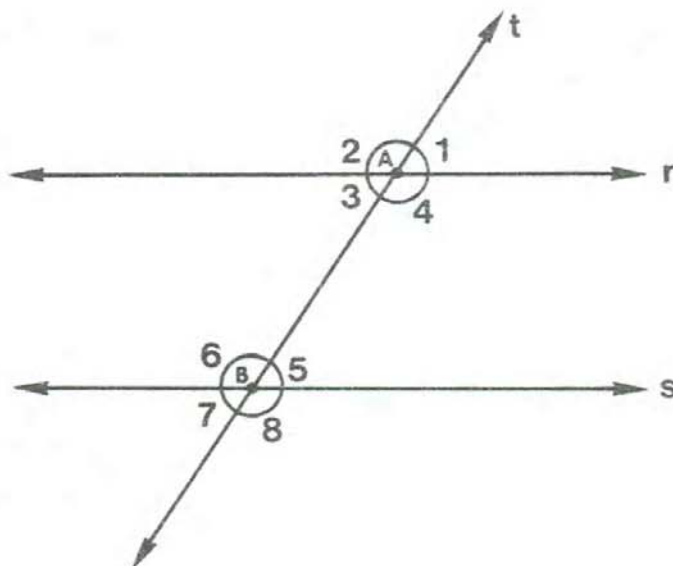
$6x = 180°$

$x = 30°$

9) As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas em graus por $15x - 14°$ e $3x + 10°$. Quanto vale x? $15x - 14° = 3x + 10°$ *Resp.: 2°*

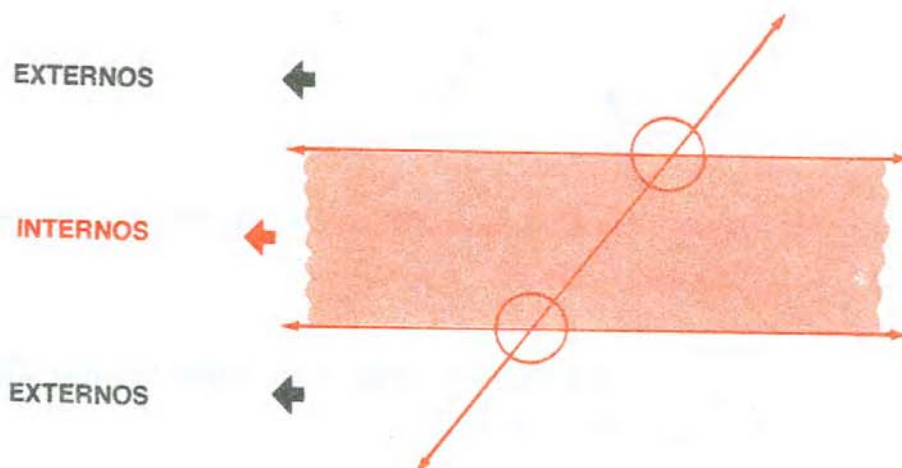
10) As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas em graus por $(2m - 50)$ e $(m + 35)$. Quanto vale m? $2m - 50 = m + 35$ *Resp.: 85*

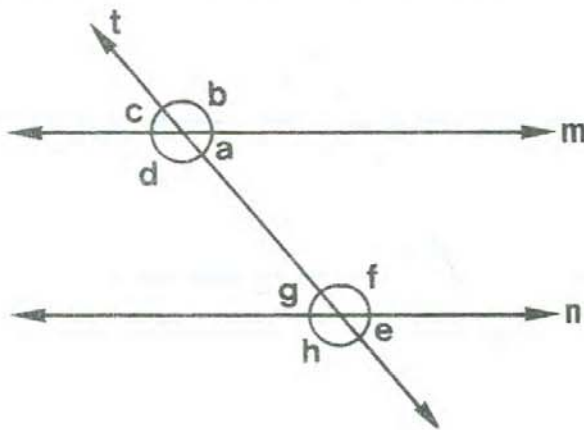
ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Duas retas r e s, interceptadas pela transversal t, formam oito ângulos.

Os pares de ângulos com um vértice em A e o outro em B são assim denominados:

- **Correspondentes:** $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$
- **Colaterais internos:** $\hat{4}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{6}$
- **Colaterais externos:** $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$
- **Alternos internos:** $\hat{4}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$
- **Alternos externos:** $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$

ILUSTRANDO:

- ALTERNOS **(um de cada "lado" da transversal).**
- COLATERAIS **(ambos do mesmo "lado" da transversal).**

EXERCÍCIOS

Dê o nome dos pares de ângulos de acordo com a figura:

a) $\hat{a}$ e $\hat{g}$ *alternos internos*

b) $\hat{a}$ e $\hat{e}$ *correspondentes*

c) $\hat{d}$ e $\hat{h}$ *correspondentes*

d) $\hat{c}$ e $\hat{g}$ *correspondentes*

e) $\hat{c}$ e $\hat{e}$ *alternos externos*

f) $\hat{a}$ e $\hat{f}$ *colaterais internos*

g) $\hat{b}$ e $\hat{h}$ *alternos externos*

h) $\hat{b}$ e $\hat{f}$ *correspondentes*

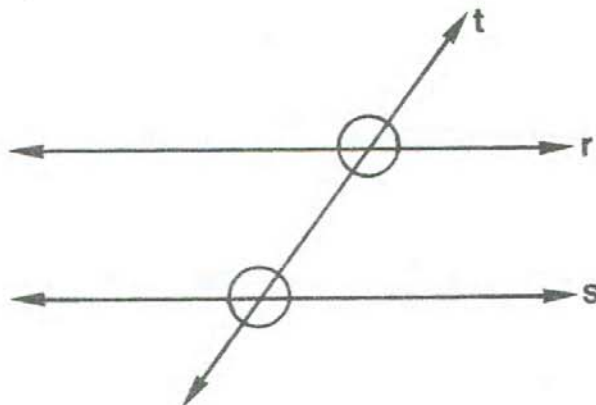
i) $\hat{d}$ e $\hat{f}$ *alternos internos*

j) $\hat{c}$ e $\hat{e}$ *alternos externos*

l) $\hat{c}$ e $\hat{h}$ *colaterais externos*

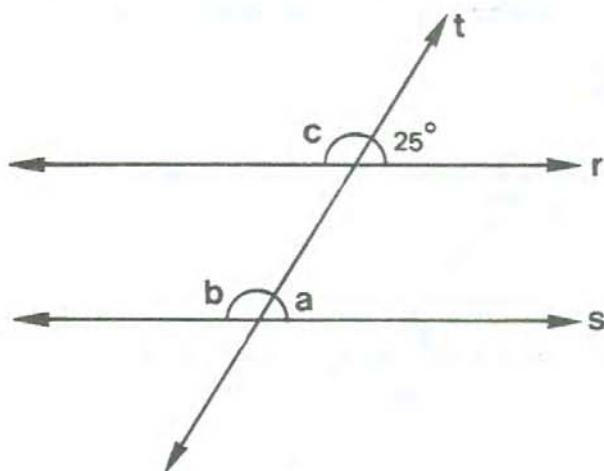
m) $\hat{b}$ e $\hat{e}$ *colaterais externos*

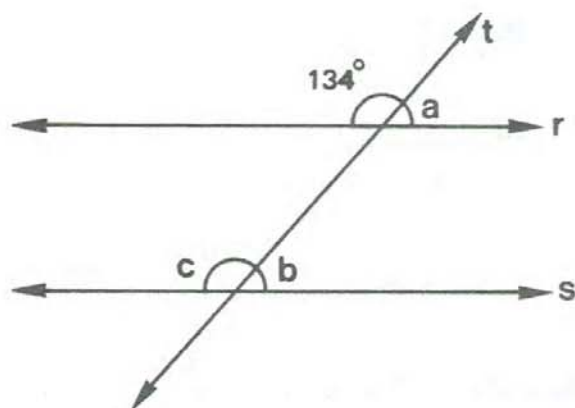
PROPRIEDADES

Considere duas retas paralelas e uma transversal.

Medindo esses ângulos com o transferidor, você vai concluir que são válidas as seguintes propriedades:

- Os ângulos correspondentes são congruentes.
- Os ângulos alternos externos são congruentes.
- Os ângulos alternos internos são congruentes.
- Os ângulos colaterais externos são suplementares.
- Os ângulos colaterais internos são suplementares.

EXERCÍCIOS

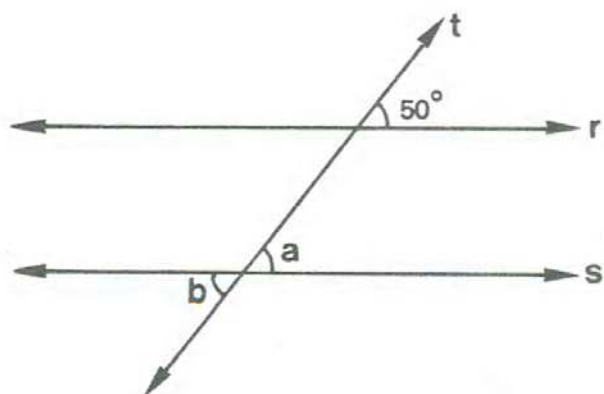
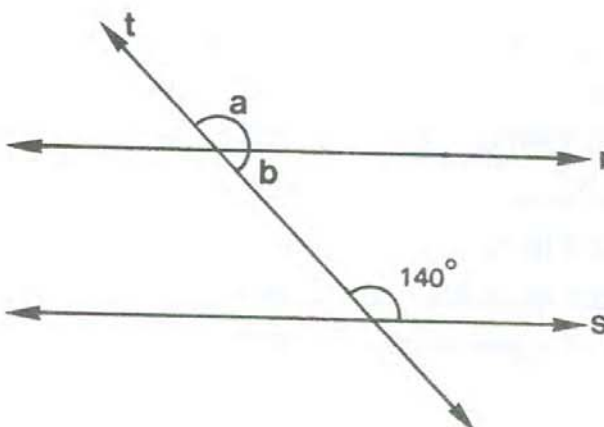
1) Sabendo que r ∥ s, determine a medida dos ângulos indicados:

a)

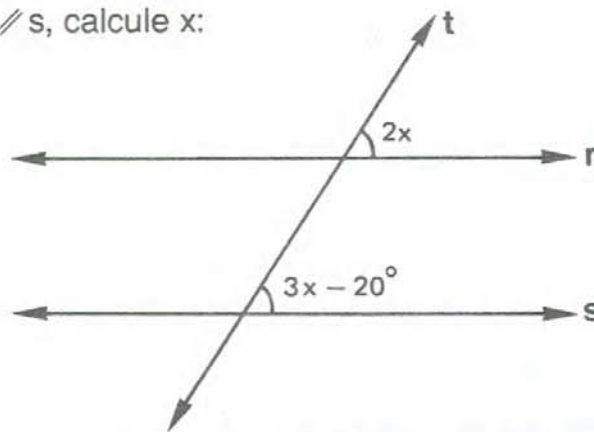
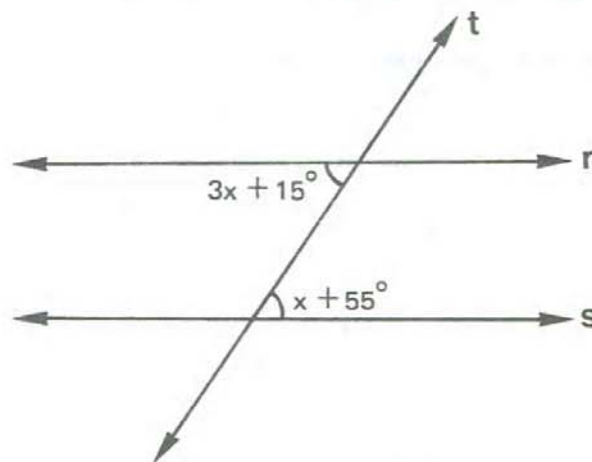
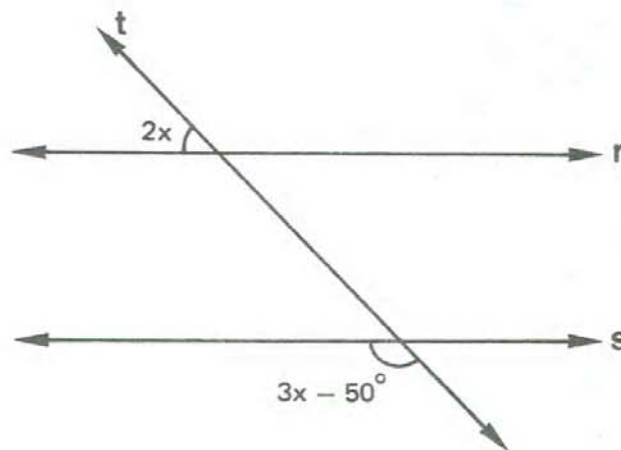
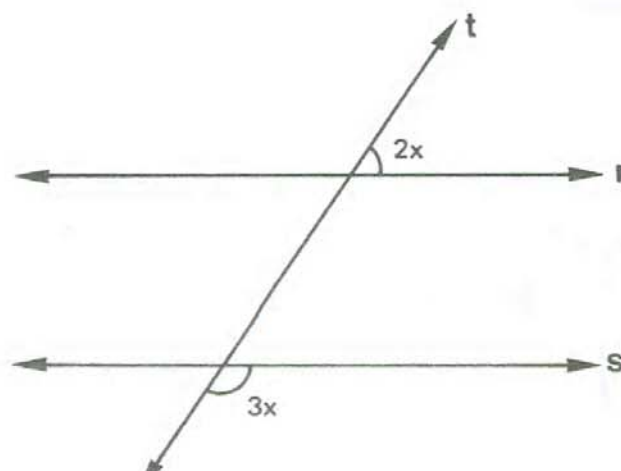
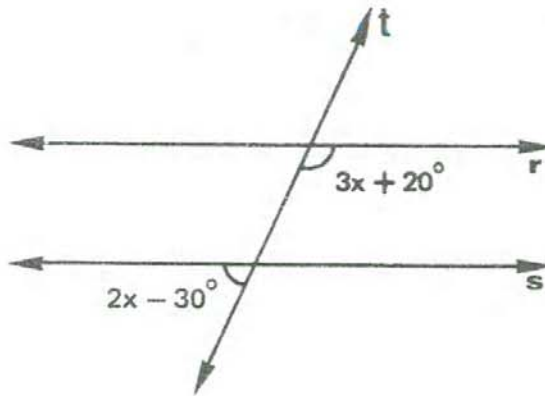
$a = 25°$
$b = 155°$
$c = 155°$

b)

$a = 46°$
$b = 46°$
$c = 134°$

c)

$a = 50°$
$b = 50°$

d)

$a = 140°$
$b = 40°$

2) Sabendo que $r \parallel s$, calcule x:

e)

$3x + 20° + 2x - 30° = 180°$

$5x = 190°$

$x = 38°$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Qual o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio

a) às 2 horas? 60°

b) às 4 horas? 120°

c) às 5 horas? 150°

d) às 6 horas? 180°

e) às 11 horas? 30°

f) às 4 horas e 30 minutos? 45°

2) Calcule x:

a)

$x = 5°$

b)

$x = 25°$

3) Calcule x:

a)

$x = 35°$

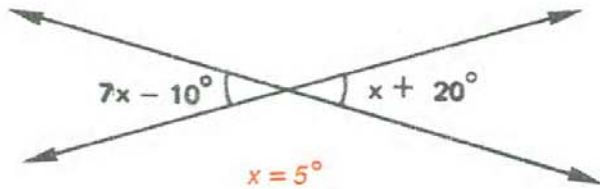
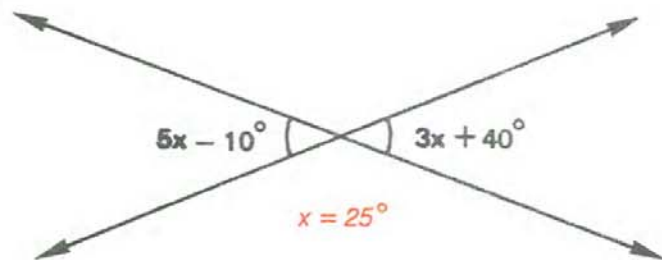
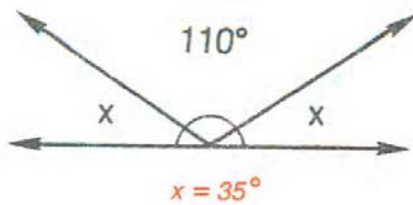
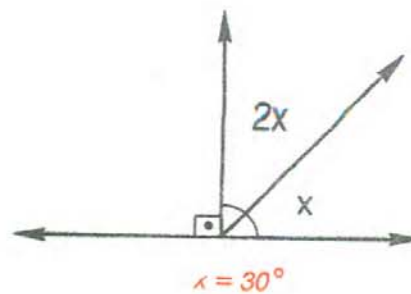
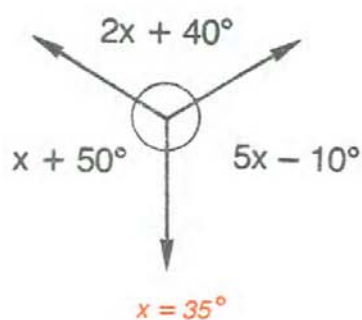
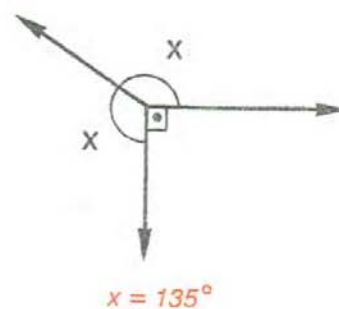
b)

$x = 30°$

c)

$x = 35°$

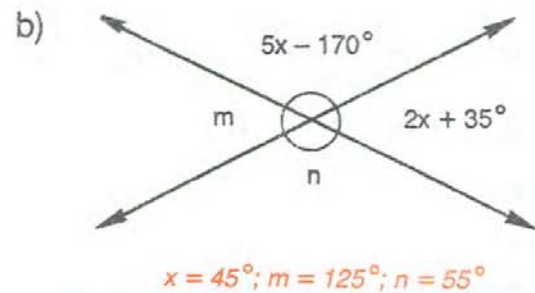
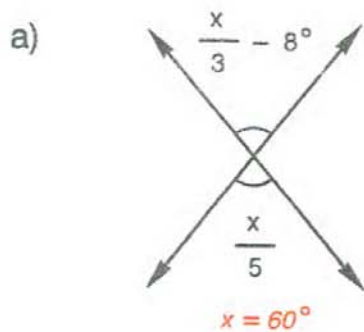
d)

$x = 135°$

4) Calcule a medida dos ângulos indicados:

a)

$x = 60°$

b)

$x = 45°$; $m = 125°$; $n = 55°$

5) Sabendo que r // s, determine x:

a)

$x = 36°$

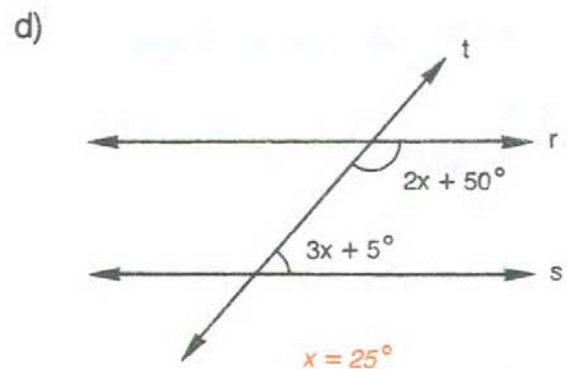
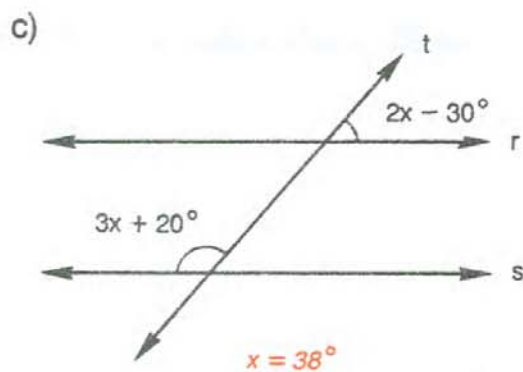
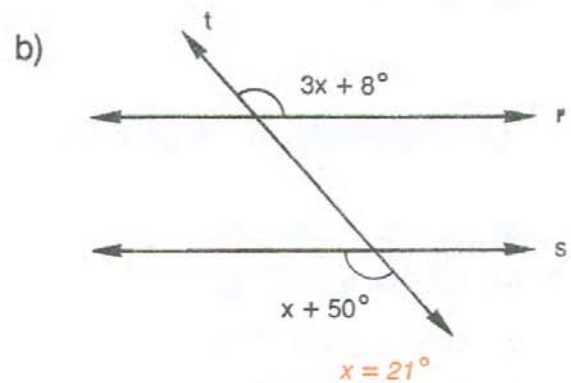
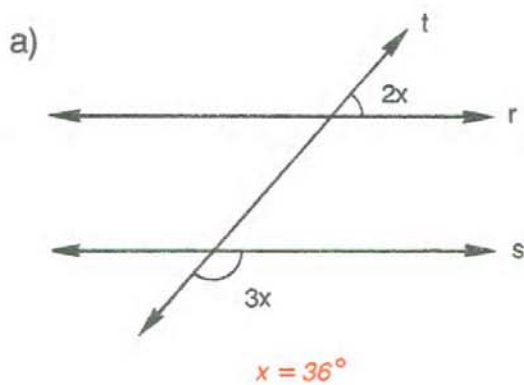
b)

$x = 21°$

c)

$x = 38°$

d)

$x = 25°$

6) As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas em graus por $4x + 10°$ e $2x + 40°$. Quanto vale x? $4x + 10° = 2x + 40°$ Resp.: 15°

7) O triplo da medida de um ângulo é igual a 141°. Qual é a medida do seu suplemento? $3x = 141° \Rightarrow x = 47°$ Resp.: 133°

8) Calcule a medida de um ângulo cuja medida de seu suplemento é o triplo da medida de seu complemento. $180° - x = 3 \cdot (90° - x)$ Resp.: 45°

TESTES

1) Se $x = 25°$ e $y = 20°$, então $3x - 10° + y$ é igual a:

a) 30°
b) 45°
c) 55°
■ d) 85°

$3 \cdot 25° - 10° + 20° =$
$= 75° - 10° + 20° = 85°$

2) Se $x = 15°$ e $y = 18° 20'$, então $x + y + 10'$ é igual a:

a) 32° 30'
■ b) 33° 30'
c) 34° 30'
d) 43° 20'

$$\begin{array}{r} 15° \\ 18° 20' \\ 10' + \\ \hline 33° 30' \end{array}$$

3) O complemento e o suplemento do ângulo de 47° 30' medem respectivamente:

a) 52° 30' e 152° 30'
■ b) 42° 30' e 132° 30'
c) 132° 30' e 42° 30'
d) 152° 30' e 52° 30'

$$\begin{array}{r} 89° 60' \\ 47° 30' - \\ \hline 42° 30' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179° 60' \\ 47° 30' - \\ \hline 132° 30' \end{array}$$

4) A terça parte de um ângulo mede 21° e 30'. Quanto mede esse ângulo?

a) 7° 10'
b) 8° 10'
c) 63° 30'
■ d) 64° 30'

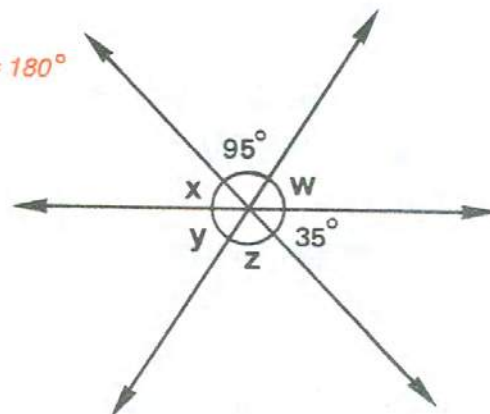
$\frac{x}{3} = 21° 30'$

$x = 63° 90'$

$x = 64° 30'$

5) Os valores de x, y, z e w, na figura abaixo, são, respectivamente:

a) 35°, 60°, 95°, 60°
b) 35°, 40°, 95°, 40°
■ c) 35°, 50°, 95°, 50°
d) 95°, 35°, 50°, 65°

$95° + w + 35° = 180°$
$w = 50°$
$x = 35°$
$y = 50°$
$z = 95°$

6) Se a soma das medidas de dois ângulos é 150° e a medida de um deles é o dobro da medida do outro, então o menor deles mede:

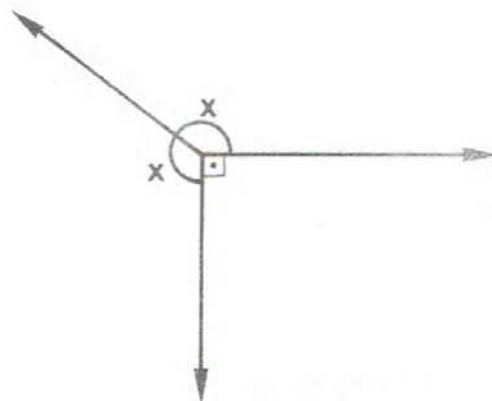
a) 40°
■ b) 50°
c) 80°
d) 100°

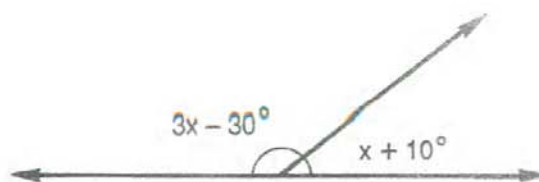
$x + 2x = 150°$
$x = 50°$

7) (OSEC-SP) Um estudante desenhou numa folha de papel um ângulo de 10° 20'. Em seguida, resolveu admirar o próprio desenho (imitando célebre detetive), através de uma lupa que aumentava quatro vezes um objeto qualquer. Ele enxergará, olhando através da lupa, um ângulo de:

■ a) 10° e 20'
b) 20° 40'
c) 41°
d) 41° 20'

8) Na figura ao lado, o ângulo x mede:

a) 115°
b) 125°
■ c) 135°
d) 145°

9) (UF-MA) Calcule x e determine o valor dos ângulos adjacentes A e B:

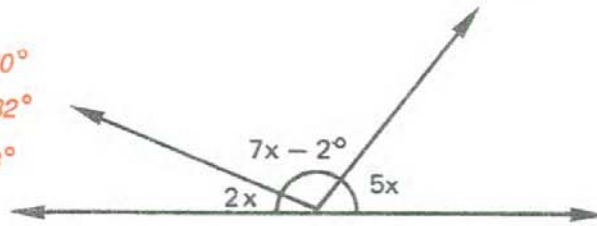
a) 105° e 75°
b) 100° e 80°
■ c) 120° e 60°
d) 90° e 90°

$3x - 30° + x + 10° = 180° \Rightarrow x = 50°$
Os ângulos medem: 120° e 60°

10) Na figura abaixo, o valor de x em graus é:

■ a) 13° $2x + 7x - 2° + 5x = 180°$

b) 14° $14x = 182°$

c) 16° $x = 13°$

d) 18°

11) As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas por $15x - 20°$ e $3x + 16°$. O valor de x é:

a) 2°

■ b) 3°

c) 4°

d) 5°

$15x - 20° = 3x + 16°$

$12x = 36°$

$x = 3°$

12) (UF-MA) Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x + 10°$ e $x + 50°$. Um deles mede:

■ a) 20°

b) 70°

c) 30°

d) 80°

$3x + 10° = x + 50°$

$2x = 40°$

$x = 20°$

13) (UE-CE) O ângulo igual a $\frac{5}{4}$ do seu suplemento mede:

■ a) 100°

b) 144°

c) 36°

d) 80°

$x = \frac{5}{4}(180° - x)$

$4x = 900° - 5x$

$x = 100°$

14) (ETI-SP) A diferença entre o suplemento e o complemento de um ângulo qualquer é:

a) um ângulo raso

b) um ângulo agudo

■ c) um ângulo reto

d) um ângulo obtuso

$D = (180° - x) - (90° - x)$

$D = 180° - x - 90° + x$

$D = 90°$

15) Na figura abaixo, sendo r paralela a s, o valor de x é:

a) 15°

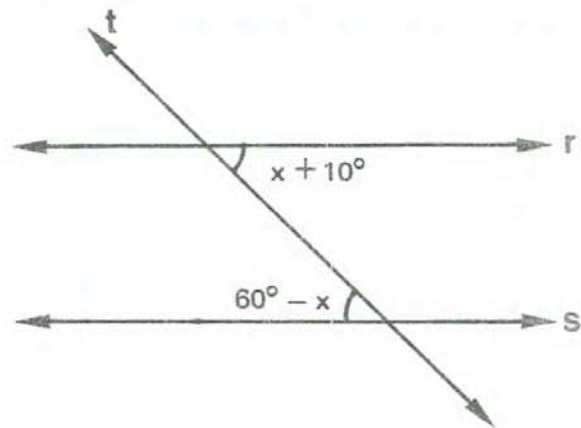
b) 20°

■ c) 25°

d) 30°

$x + 10° = 60° - x$

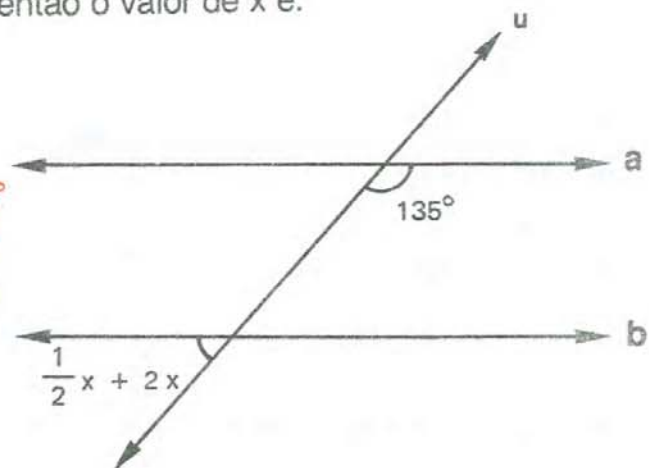
$2x = 50°$

$x = 25°$

16) (PUC-SP) Sendo **a** paralela a **b**, então o valor de x é:

■ a) 18°

b) 45°

c) 90°

d) 60° 30' 10"

$\frac{1}{2}x + 2x + 135° = 180°$

$5x = 90°$

$x = 18°$

17) (UF-ES) Uma transversal intercepta duas paralelas formando ângulos alternos internos expressos em graus por (5x + 8) e (7x – 12). A soma das medidas desses ângulos é:

a) 40°

b) 58°

c) 80°

■ d) 116°

$7x - 12° = 5x + 8°$

$2x = 20°$

$x = 10°$

$(5x + 8) + (7x - 12) = 116°$

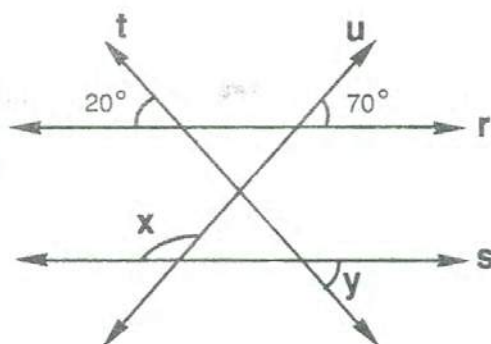
18) (CARLOS CHAGAS-SP) Na figura abaixo tem-se r∥s; t e u são transversais. O valor de x + y é:

a) 140°

■ b) 130° *$x + 70° = 180° \Rightarrow x = 110°$*

c) 120° *$y = 20°$*

d) 100° *Logo:*

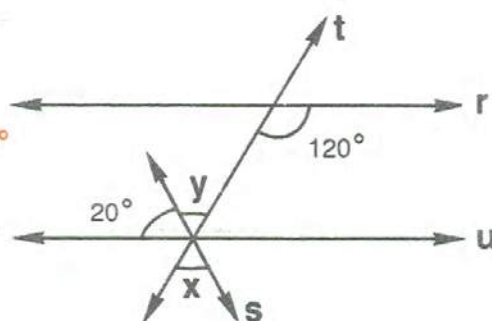
$x + y = 130°$

19) (FGV-SP) Considere as retas r, s, t, u, todas num mesmo plano, com r ∥ u. O valor em graus de (2x + 3y) é:

a) 520°

b) 580° *$20° + y = 120° \Rightarrow y = 100°$*

■ c) 500° *Logo: $x = 100°$*

d) 660° *Assim:*

$2x + 3y = 500°$

20) (PUC-SP) Se r é paralela a s, então m e n medem respectivamente:

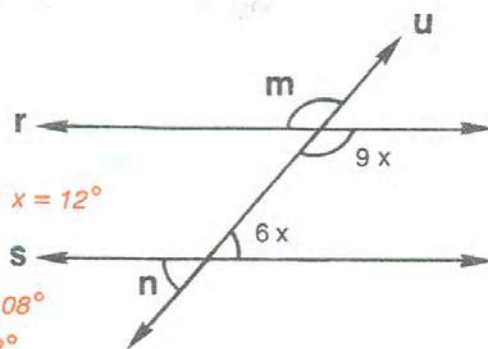
a) 120° e 60°

b) 100° e 80°

■ c) 108° e 72° *$9x + 6x = 180° \Rightarrow x = 12°$*

d) 150° e 30° *Então:*

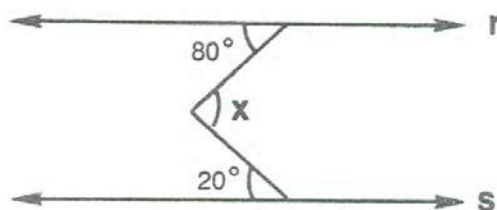
$m = 9x \Rightarrow m = 108°$

$n = 6x \Rightarrow n = 72°$

21) Na figura, r e s são paralelas. Então, o valor de x é:

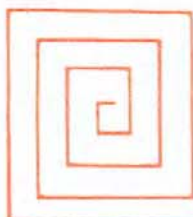
a) 90°

■ b) 100°

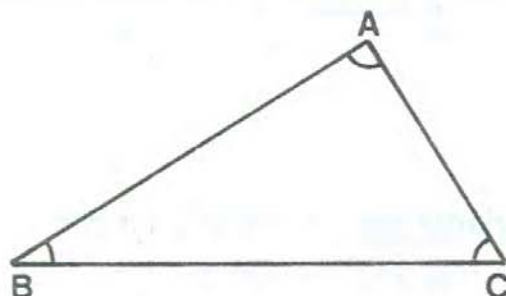
c) 110°

d) 120°

Pelo vértice do ângulo x, traçar uma reta t paralela a r e s.

Vamos ter: $x = 80° + 20° = 100°$

15

TRIÂNGULOS

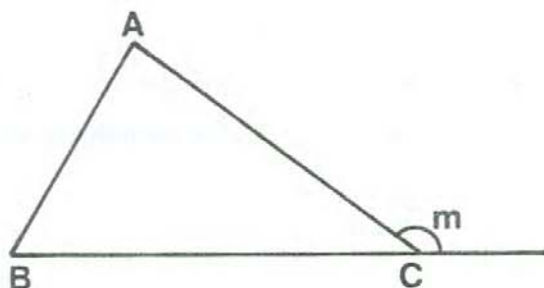
CONCEITO

Triângulo é um polígono de três lados.

Na figura acima:

- Os pontos A, B e C são os **vértices** do triângulo.
- Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os **lados** do triângulo.
- Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são **ângulos internos** do triângulo.

Indicamos um triângulo de vértices A, B e C por $\triangle$ ABC.

ÂNGULO EXTERNO

Ângulo externo é o ângulo suplementar do ângulo interno.

Na figura acima $\hat{m}$ é um ângulo externo.

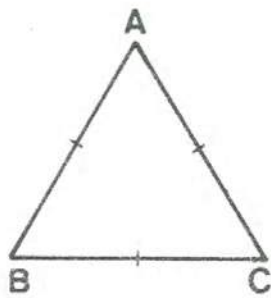
PERÍMETRO

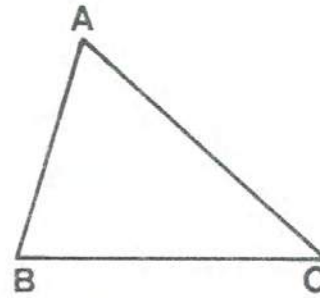
O perímetro de um triângulo é igual à soma das medidas dos seus lados.

Perímetro $\triangle$ ABC = $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$

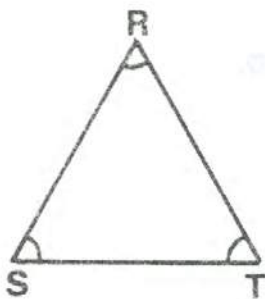
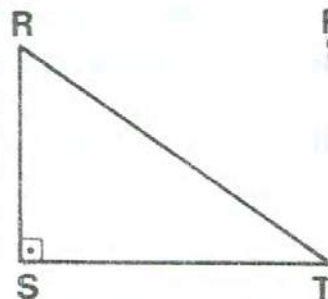
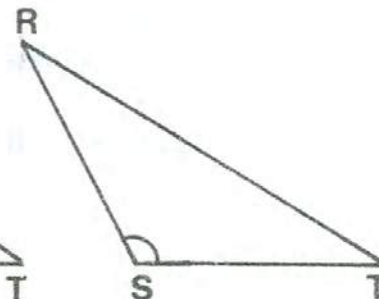
CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

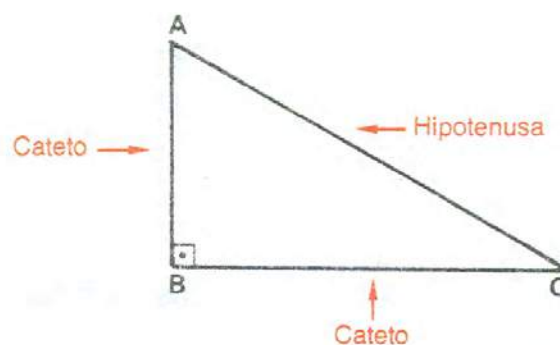
Quanto aos lados os triângulos se classificam em:

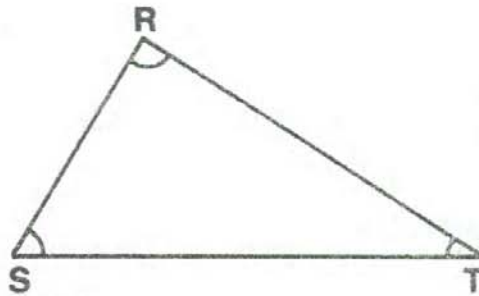
- **Equilátero** quando tem os três lados congruentes.
- **Isósceles** quando tem dois lados congruentes.
- **Escaleno** quando não tem lados congruentes.

EQUILÁTERO

ISÓSCELES

ESCALENO

Quanto aos ângulos os triângulos se classificam em:

- **Acutângulo** quando tem três ângulos agudos.
- **Retângulo** quando tem um ângulo reto.
- **Obtusângulo** quando tem um ângulo obtuso.

ACUTÂNGULO

RETÂNGULO

OBTUSÂNGULO

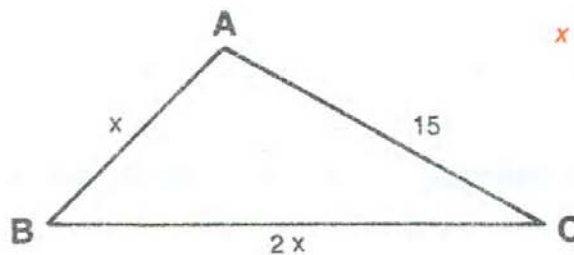
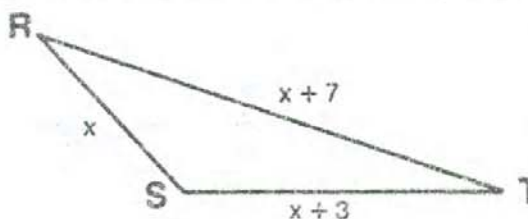
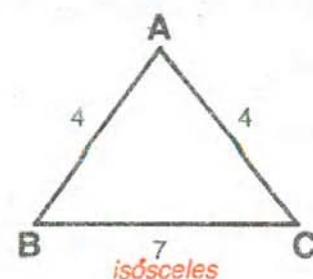
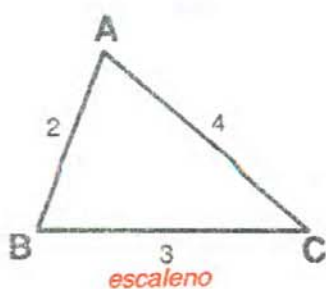
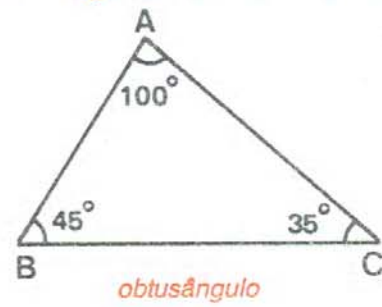
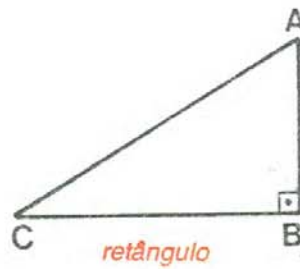
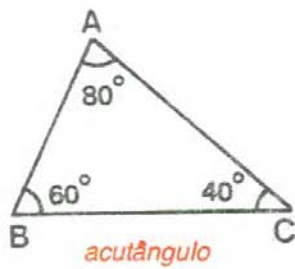
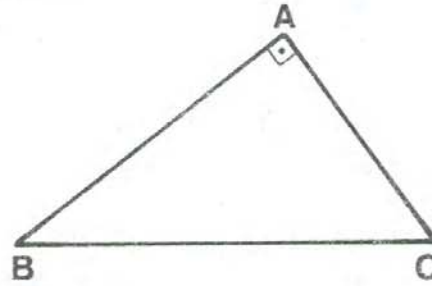
Em um triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto chamam-se **catetos** e o lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa.**

EXERCÍCIOS

1) Observe o triângulo e responda:

a) Quais são os vértices? *R, S, T*

b) Quais são os lados? *$\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TR}$*

c) Quais são os ângulos? *$\hat{R}$, $\hat{S}$, $\hat{T}$*

2) O perímetro de um triângulo é 25 cm. Dois lados medem respectivamente 7,8 cm e 8,2 cm. Calcule a medida do terceiro lado. *Resp.: 9 cm*

3) Determine o comprimento do lado $\overline{BC}$, sabendo que o perímetro do $\triangle$ ABC é 48 cm.

4) O perímetro do triângulo é 34 cm. Determine o comprimento do menor lado.

5) Classifique o triângulo de acordo com as medidas dos lados.

6) Classifique o triângulo de acordo com as medidas dos ângulos:

7) Observe a figura e responda:

a) Que nome recebe o lado $\overline{BC}$? *Hipotenusa.*

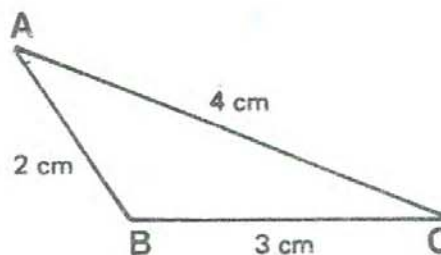
b) Que nome recebem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? *Catetos.*

8) Que nome recebe o maior lado de um triângulo retângulo? *Hipotenusa.*

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

Em qualquer triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois lados.

Exemplo:

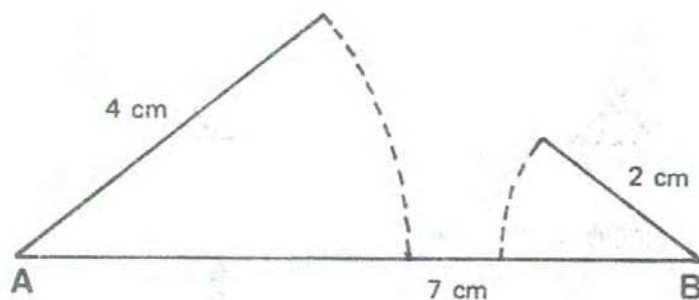
Seja o triângulo:

Vamos comparar a medida de cada lado com a soma das medidas dos outros dois.

Assim:

$2 < 3 + 4$ ou $2 < 7$

$3 < 2 + 4$ ou $3 < 6$

$4 < 2 + 3$ ou $4 < 5$

Para verificar a citada propriedade, procure construir um triângulo com as seguintes medidas: 7 cm, 4 cm e 2 cm.

É impossível, não? Logo **não existe** o triângulo cujos lados medem 7 cm, 4 cm e 2 cm.

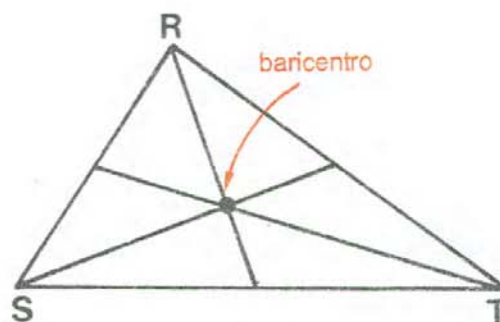
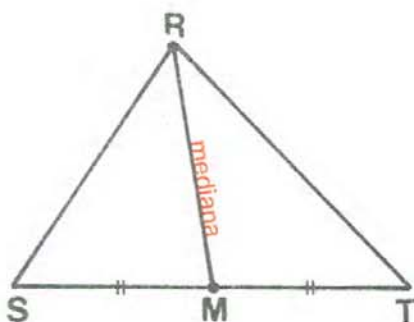
EXERCÍCIOS

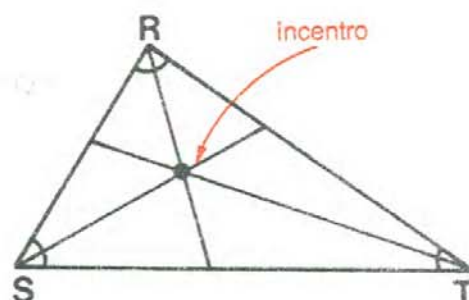
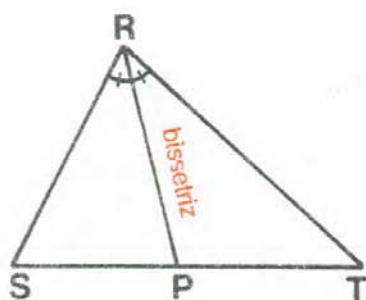
1) Existe ou não um triângulo com lados medindo:

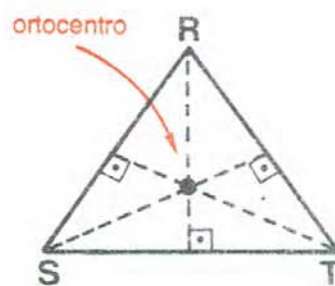
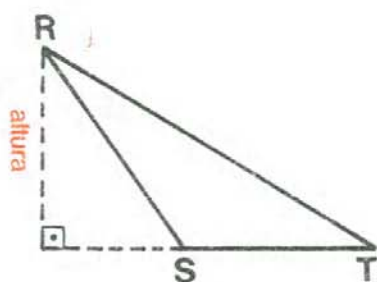
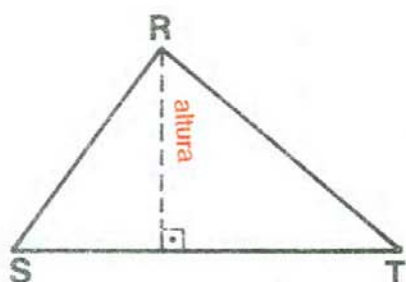
a) 10 cm, 8 cm e 7 cm? *Sim.*
b) 8 cm, 4 cm e 3 cm? *Não.*
c) 2 cm, 4 cm e 6 cm? *Não.*
d) 3 cm, 4 cm e 5 cm? *Sim.*
e) 3 cm, 5 cm e 6 cm? *Sim.*
f) 4 cm, 10 cm e 5 cm? *Não.*

2) Dois lados de um triângulo isósceles medem 38 cm e 15 cm. Qual poderá ser a medida do terceiro lado? *38 cm*

ELEMENTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

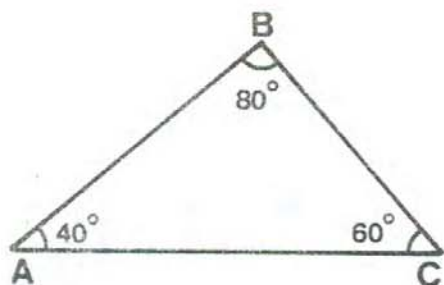
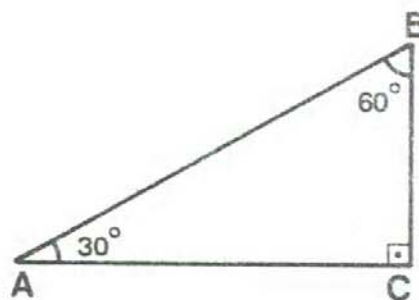
- **Mediana** de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Todo triângulo tem três medianas que se encontram em um ponto chamado **baricentro**.

- **Bissetriz** de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo interno que tem por extremidades o vértice desse ângulo e o ponto de encontro com o lado oposto.

Todo triângulo tem três bissetrizes que se encontram em um ponto interior chamado **incentro.**

- **Altura** de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.

Todo triângulo tem três alturas que se encontram em um ponto chamado **ortocentro.**

SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Observe os triângulos e as medidas dos ângulos internos.

B
60°
30°
A
C

$80° + 40° + 60° = 180°$

$30° + 60° + 90° = 180°$

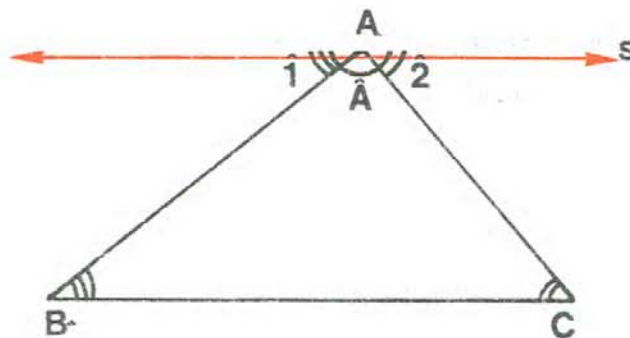
Note que: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$

Vamos à demonstração desse teorema.

TEOREMA

> Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

Prova:

Consideremos um triângulo ABC. Vamos provar que $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$

a) Pelo vértice A, traçamos a reta s paralela ao lado $\overline{BC}$.

$$m(\hat{1}) + m(\hat{A}) + m(\hat{2}) = 180° \quad ❶$$

Note que: $m(\hat{1}) \cong m(\hat{B})$ (alternos internos) ❷

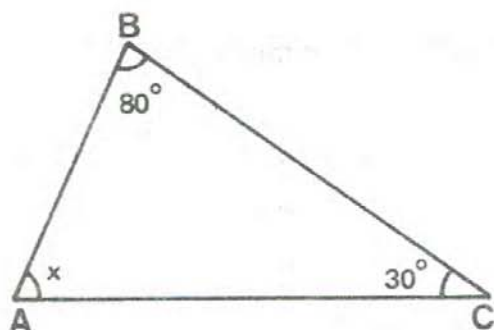
$m(\hat{2}) \cong m(\hat{C})$ (alternos internos) ❸

b) Temos que:

c) Substituindo ❷ e ❸ em ❶, temos:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

Exercícios Resolvidos

1 Calcular x no triângulo abaixo:

Solução:

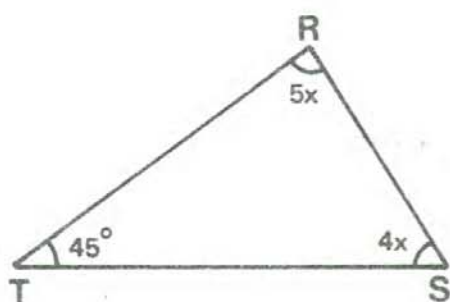
Pelo teorema anterior:

$x + 80° + 30° = 180°$

$x = 180° - 80° - 30°$

$x = 70°$

Resposta: $x = 70°$

2 Calcular x no triângulo abaixo:

Solução:

Pelo teorema anterior:

$5x + 45° + 4x = 180°$

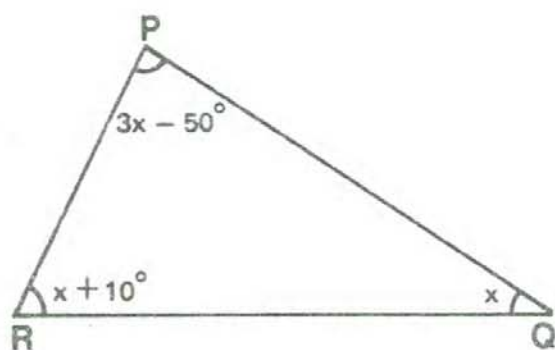
$5x + 4x = 180° - 45°$

$9x = 135°$

$x = \dfrac{135°}{9}$

$x = 15°$

Resposta: $x = 15°$

3 Calcular x no triângulo abaixo:

Solução:

Pelo teorema anterior:

$3x - 50° + x + 10° + x = 180°$

$3x + x + x = 180° + 50° - 10°$

$5x = 220°$

$x = \dfrac{220°}{5}$

$x = 44°$

Resposta: $x = 44°$

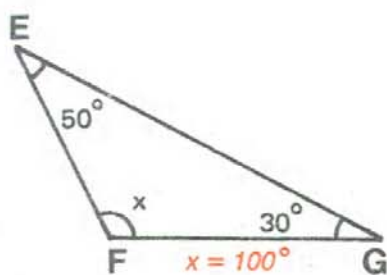
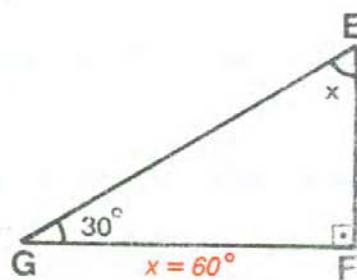
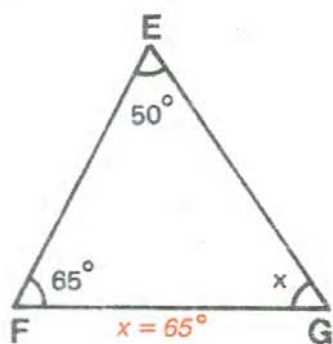
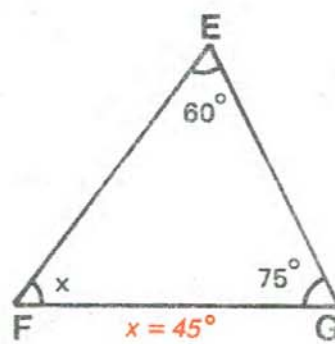
EXERCÍCIOS

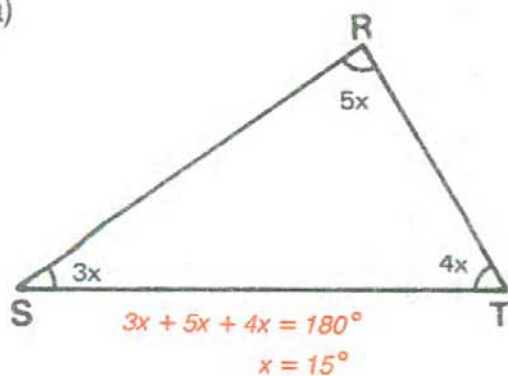
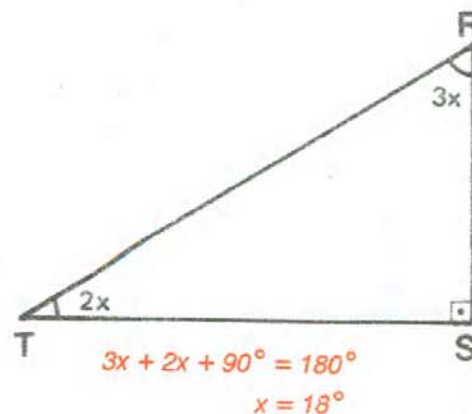
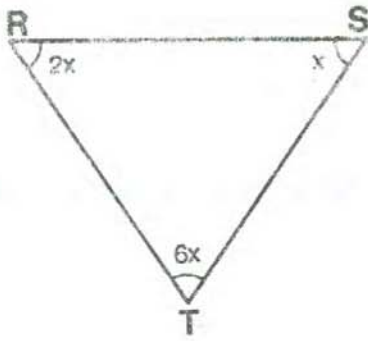
1) Quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo? 180°

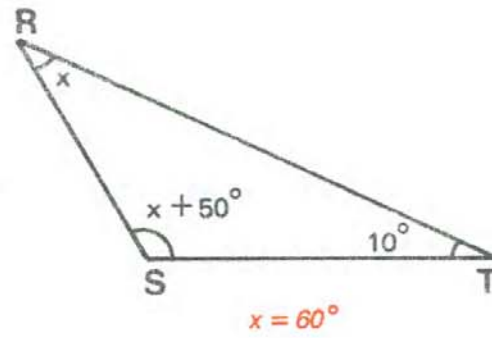
2) Copie e complete o quadro, sendo Â, B̂ e Ĉ ângulos internos de um triângulo.

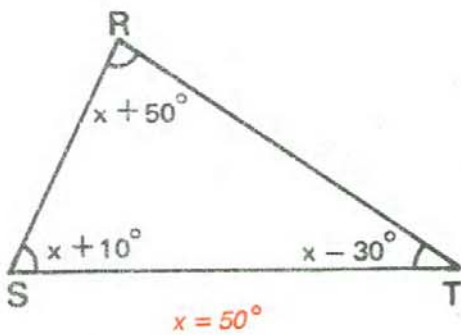
Â	30°	20°	60°	75°	90°	91°
B̂	70°	50°	60°	40°	47°	38°
Ĉ	80°	110°	60°	65°	43°	51°

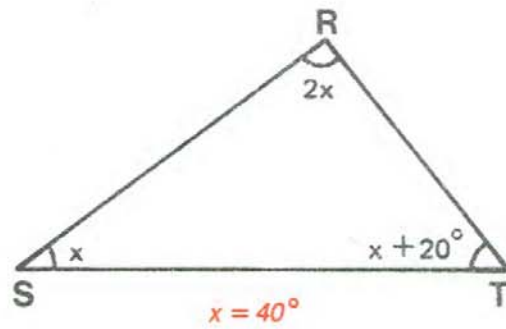
3) Determine x em cada um dos triângulos:

a)

b)

c)

d)

4) Determine x em cada um dos triângulos:

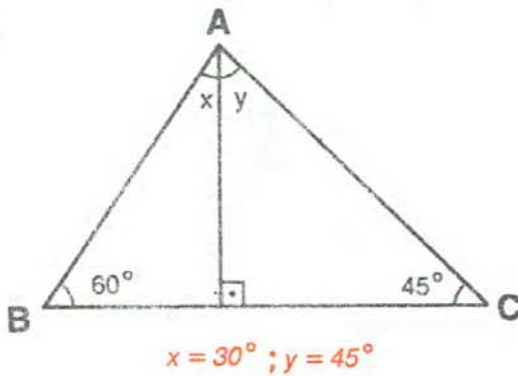
a)

b)

c)

$x = 20°$

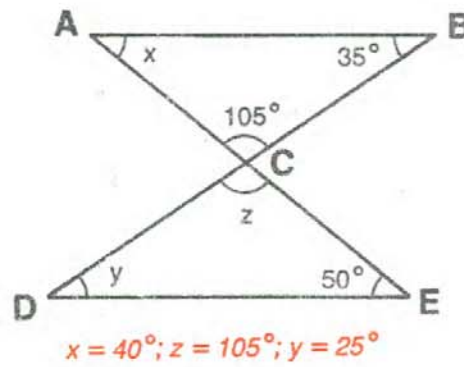
d)

$x = 60°$

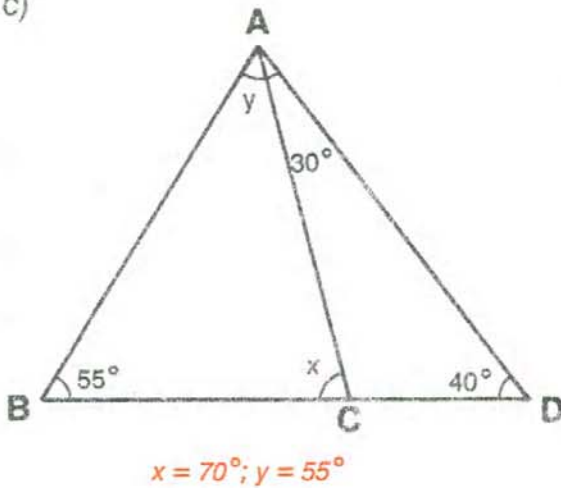
e)

$x = 50°$

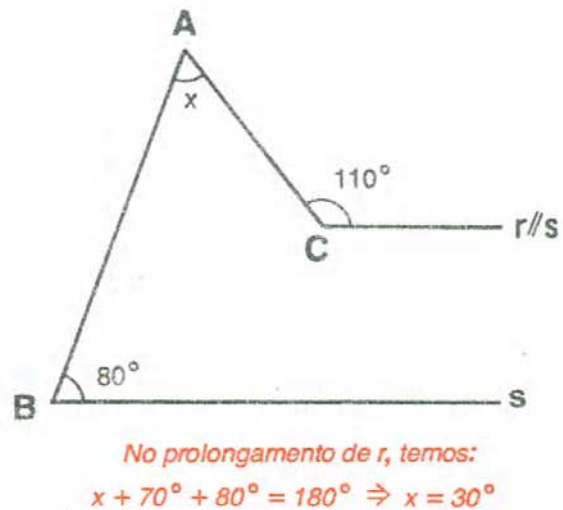
f)

$x = 40°$

5) Determine a medida dos ângulos x, y e z.

a)

$x = 30°$; $y = 45°$

b)

$x = 40°$; $z = 105°$; $y = 25°$

c)

$x = 70°$; $y = 55°$

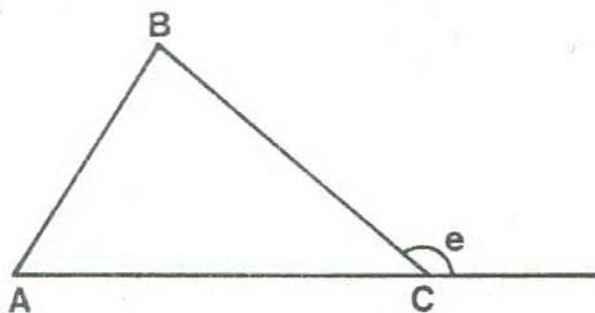
d)

No prolongamento de r, temos:

$x + 70° + 80° = 180° \Rightarrow x = 30°$

TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

> Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes.

Prova:

Consideremos um triângulo ABC. Vamos provar que $m(\hat{e}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$

a) $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$ (pelo teorema anterior)

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180° - m(\hat{C})$ ❶

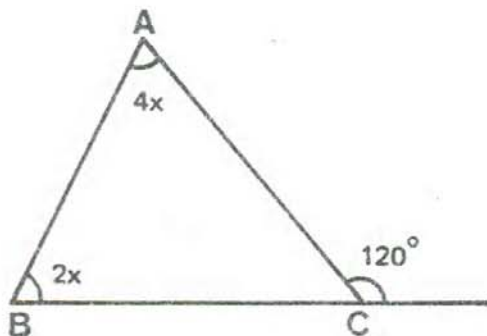
b) $m(\hat{e}) + m(\hat{C}) = 180°$

$m(\hat{e}) = 180° - m(\hat{C})$ ❷

Igualando ❶ e ❷ temos:

$$m(\hat{e}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$$

Exemplo:

Calcule o valor de x no triângulo abaixo:

Solução:

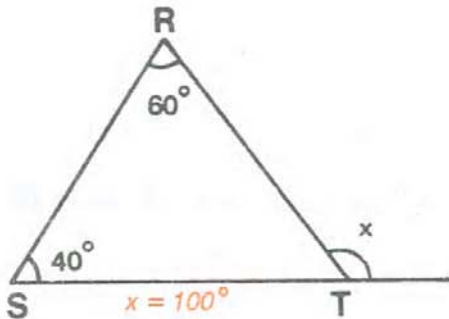
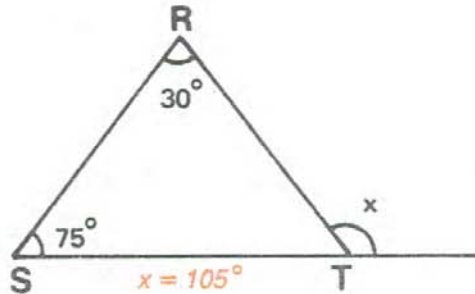
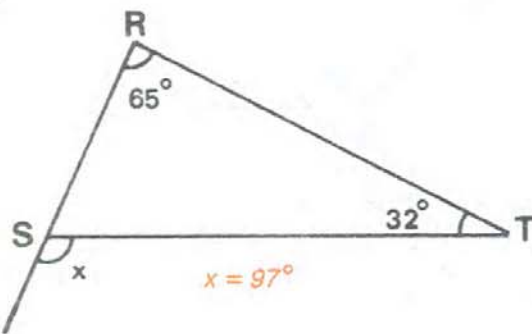
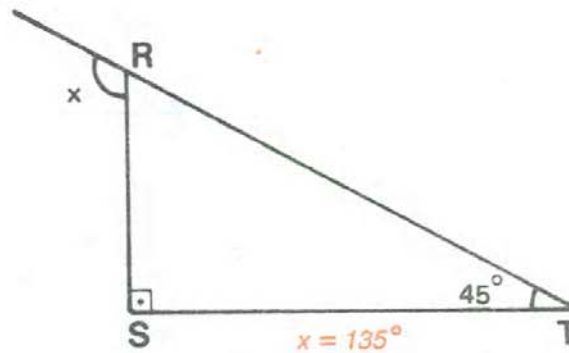
Pelo teorema do ângulo externo, temos:

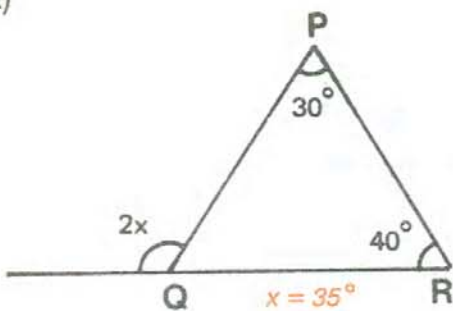
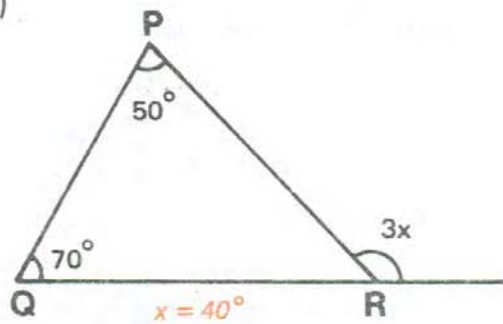
$$4x + 2x = 120°$$
$$6x = 120°$$
$$x = 20°$$

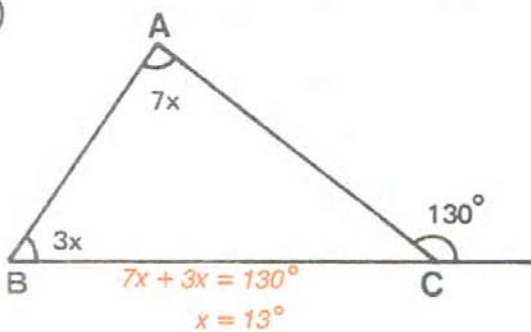
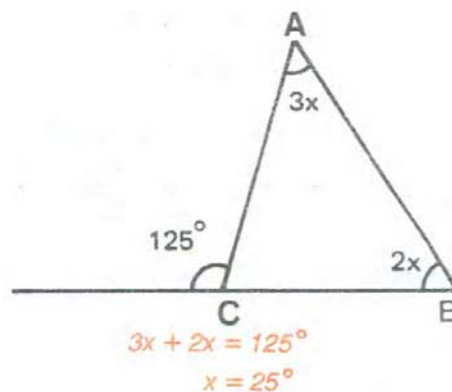
Resposta: $x = 20°$

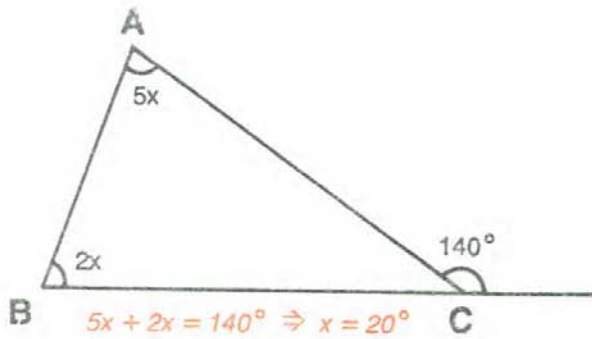
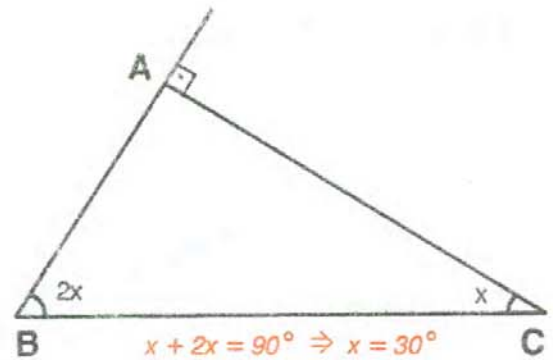
EXERCÍCIOS

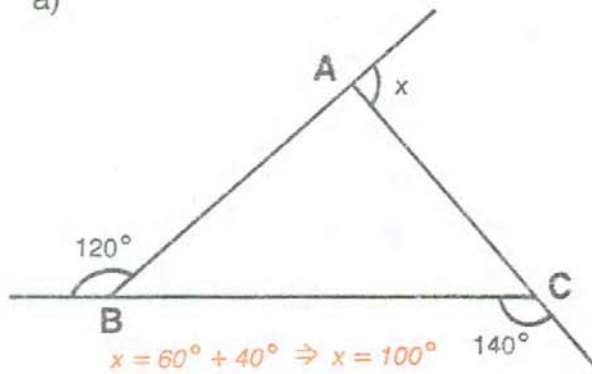
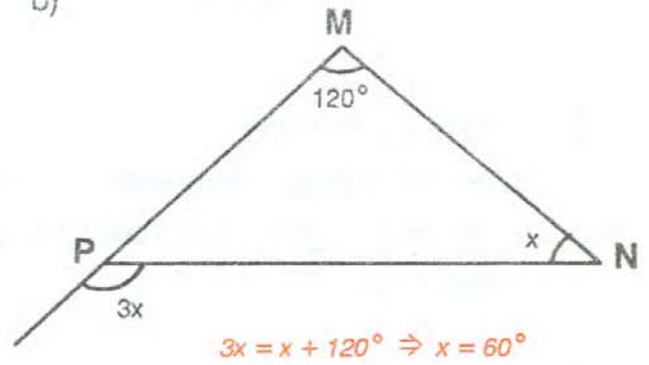
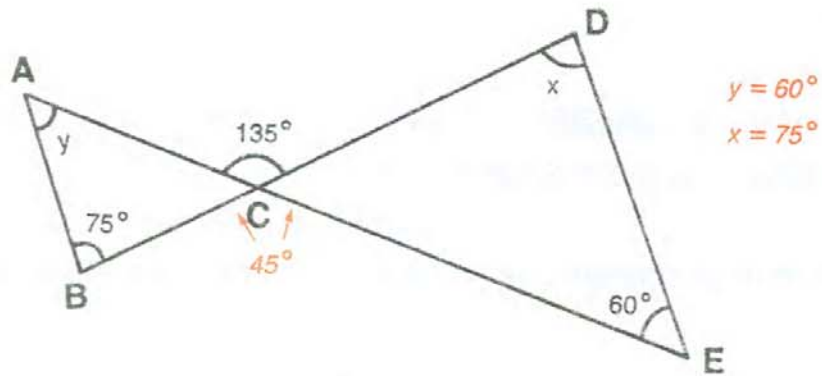
1) Determine a medida do ângulo externo indicado em cada triângulo:

a)

b)

c)

d)

2) Calcule o valor de x nos triângulos dados:

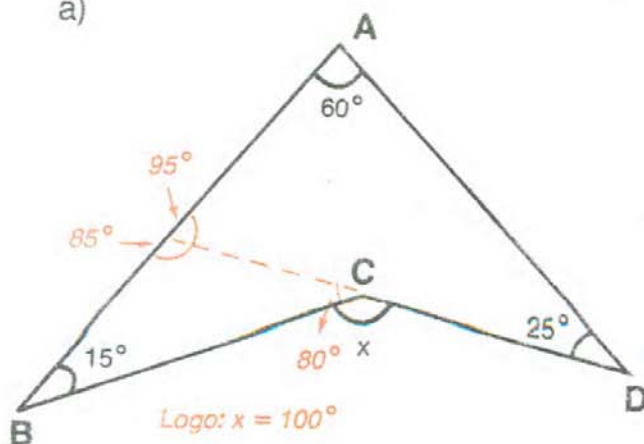
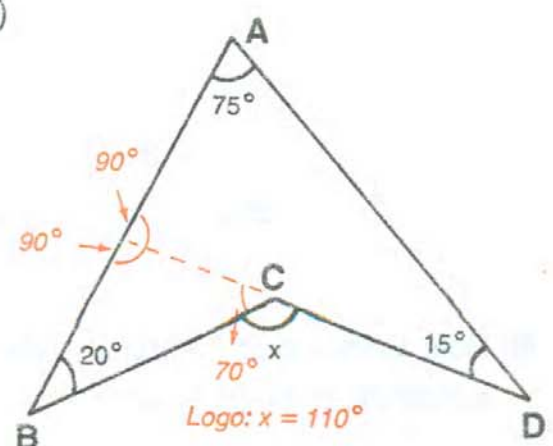
a)

b)

3) Calcule o valor de x nos triângulos dados:

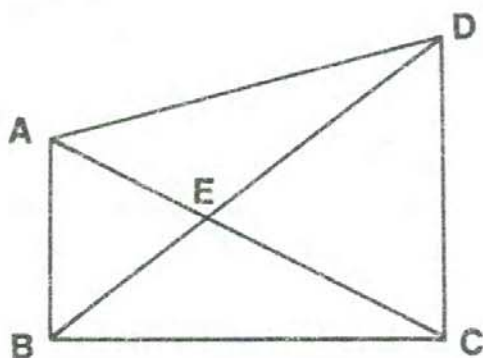
a)

b)

4) Calcule o valor de x nos triângulos dados:

a)

b)

5) Calcule o valor de x:

a)

b)

6) Calcule x e y:

7) Calcule x:

a)

b)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Escreva os oito triângulos que aparecem na figura abaixo:

$\triangle AED$ $\triangle ADB$
$\triangle AEB$ $\triangle BCD$
$\triangle BEC$ $\triangle ABC$
$\triangle CED$ $\triangle ADC$

2) Calcule o perímetro:

a) de um triângulo equilátero cujo lado mede 5,2 cm. *15,6 cm*

b) de um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem 7 cm e o terceiro lado 5 cm. *19 cm*

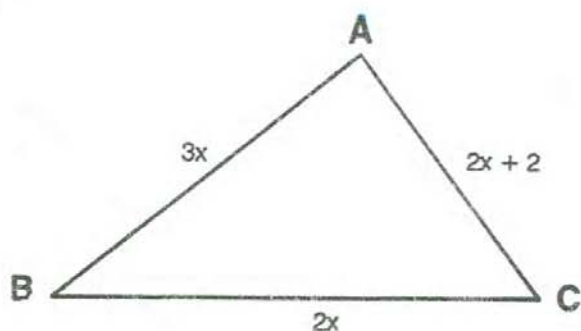
3) O perímetro de um triângulo equilátero é de 22,5 cm. Qual a medida de cada lado? *7,5 cm*

4) Num triângulo isósceles, os lados congruentes medem 7 cm e o perímetro mede 22 cm. Qual a medida do terceiro lado? *8 cm*

5) O perímetro do triângulo da figura é 37 cm. Qual a medida do menor lado?

$2x + 3x + 2x + 2 = 37$

$7x = 35$

$x = 5$

6) Dois lados de um triângulo isósceles medem 28 cm e 13 cm. Qual poderá ser a medida do terceiro lado? *28 cm*

7) Com os segmentos de medidas 8 cm, 7 cm e 18 cm podemos construir um triângulo? Por quê? *Não. Porque 18 não é menor que 8 + 7.*

8) Calcule x:

a)

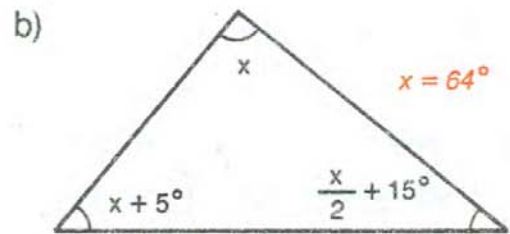
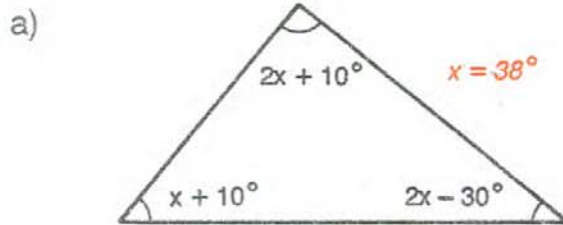
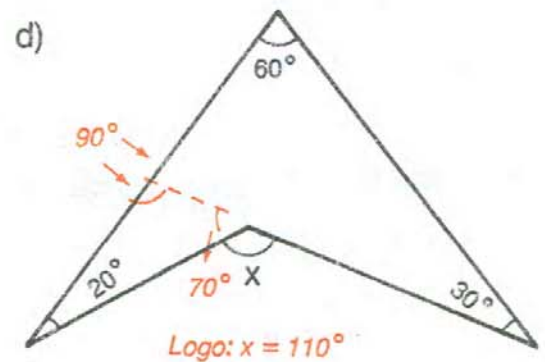
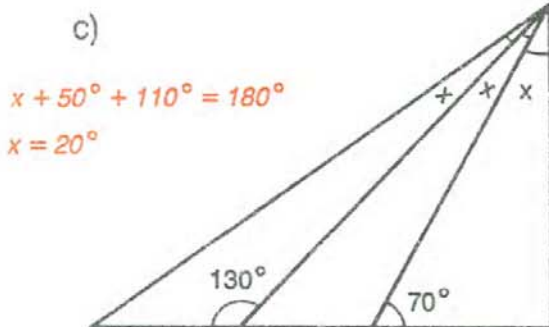
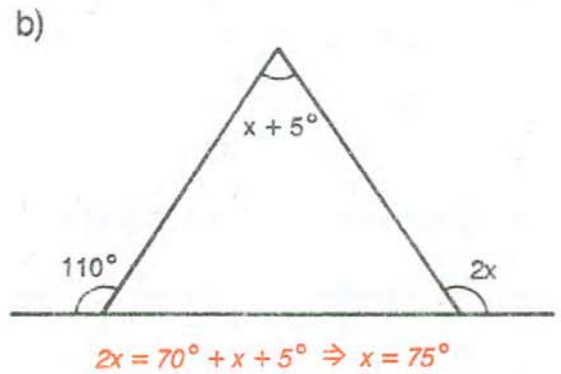
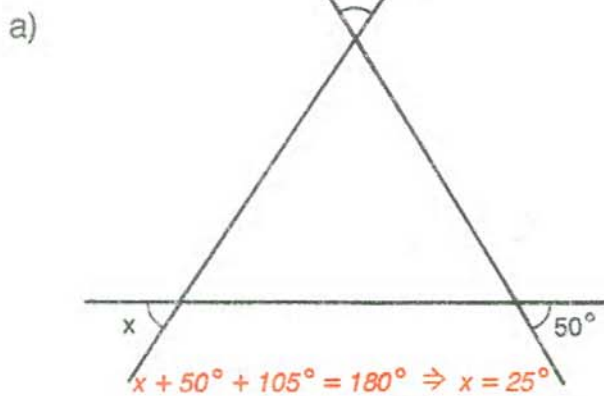
b)

9) Calcule x:

a)

b)

c)

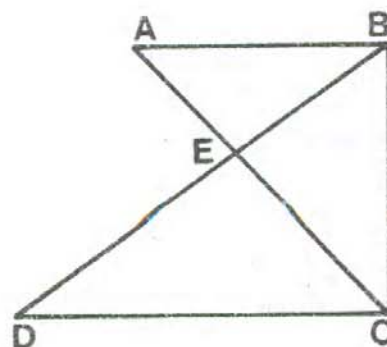
d)

TESTES

1) Na figura ao lado há:

a) 3 triângulos

b) 4 triângulos

■ c) 5 triângulos

d) 8 triângulos

△ABE
△BEC
△ECD
△ABC
△BCD

2) Em um triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto chama-se:

■ a) hipotenusa

b) cateto

c) base

d) bissetriz

3) (ILHÉUS-ITABUNA-BA) Em um triângulo isósceles, o perímetro mede 80 cm. Sabendo-se que a base vale 20 cm, cada lado deve valer:

a) 20 cm

■ b) 30 cm

c) 40 cm

d) 60 cm

$x + x + 20 = 80$

$x = 30$

4) O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das:

a) alturas

■ b) medianas

c) mediatrizes

d) bissetrizes

5) (UF-MG) O ponto onde concorrem as três alturas de um triângulo é denominado:

a) incentro

b) circuncentro

c) baricentro

■ d) ortocentro

6) (PUC-SP) Dois lados de um triângulo isósceles medem 5 cm e 12 cm. O terceiro lado mede:

a) 5 cm

■ b) 12 cm

c) 10 cm

d) 15 cm

Cada lado deve ser menor que a soma dos outros dois.

Então, o terceiro lado mede 12 cm.

7) (UF-MA) Dois lados de um triângulo isósceles medem, respectivamente, 5 cm e 2 cm. Qual o seu perímetro?

a) 7 cm
b) 9 cm
■ c) 12 cm
d) 14 cm

$P = 5 + 5 + 2$

$P = 12$

8) (CESESP-PE) Com três segmentos de comprimentos iguais a 10 cm, 12 cm e 23 cm:

a) é possível formar apenas um triângulo retângulo.
b) é possível formar apenas um triângulo obtusângulo.
c) é possível formar apenas um triângulo acutângulo.
■ d) não é possível formar um triângulo.

$23 > 10 + 12$

9) (UF-GO) Se dois lados de um triângulo medem respectivamente 3 dm e 4 dm, podemos afirmar que a medida do terceiro lado é:

a) igual a 5 dm
b) igual a 1 dm
■ c) menor que 7 dm
d) maior que 7 dm

O terceiro lado tem que ser menor que a soma dos outros dois.

10) Num triângulo, um dos ângulos mede 27° e o outro mede 64°. O terceiro ângulo interno mede:

a) 69°
b) 79°
■ c) 89°
d) 99°

$x + 27° + 64° = 180°$

$x = 89°$

11) (PUC-SP) Os ângulos de um triângulo medem 3x, 4x e 5x. O menor desses ângulos mede:

a) 15°
b) 18°
c) 30°
■ d) 45°

$3x + 4x + 5x = 180°$

$x = 15°$

Menor $= 3x = 45°$

12) Num triângulo, um ângulo mede o dobro de outro e o terceiro, 30°. O maior deles mede:

a) 50°

b) 70°

■ c) 100°

d) 140°

$2x + x + 30° = 180°$

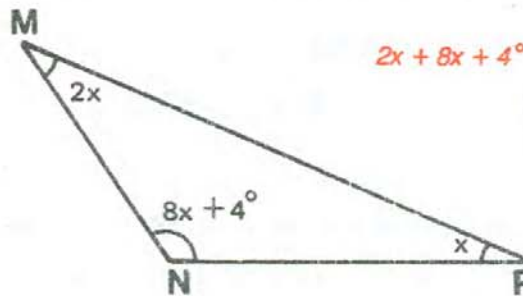
$x = 50°$

Maior ângulo: 100°

13) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 10°

b) 12°

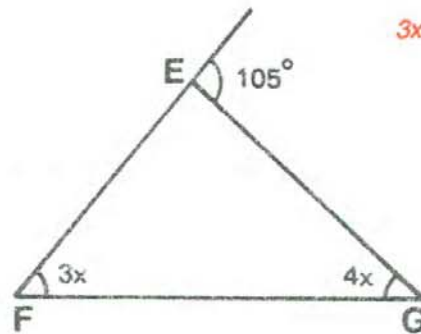
c) 14°

■ d) 16°

14) Na figura abaixo, o valor de x é:

■ a) 15°

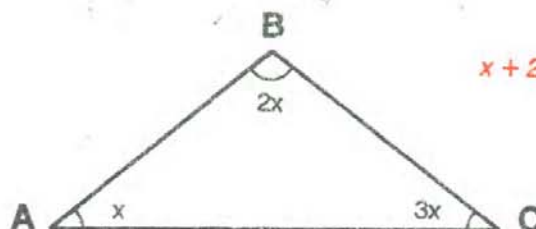
b) 20°

c) 25°

d) 30°

15) (FMU-SP) Sabemos que se trata de um triângulo qualquer. Então, podemos afirmar que:

■ a) $x = 30°$

b) $x = 40°$

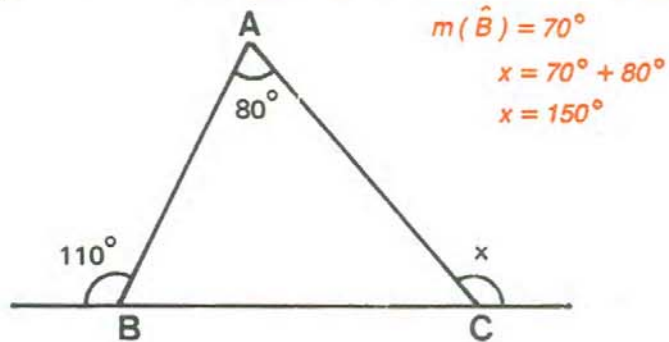
c) $x = 10°$

d) $x = 20°$

16) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 100°

b) 130°

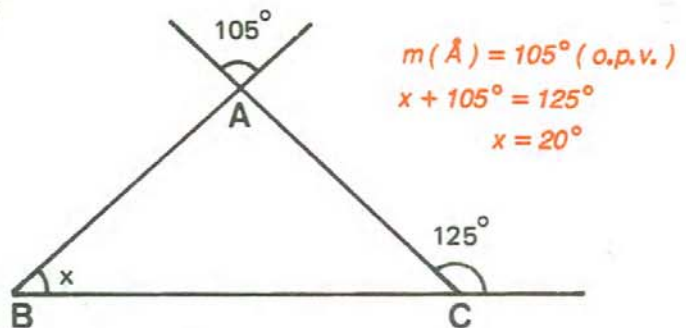
c) 140°

■ d) 150°

17) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 10°

b) 15°

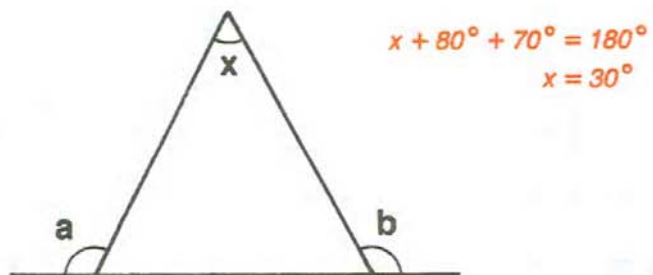
■ c) 20°

d) 25°

18) (PUC-SP) Na figura abaixo a = 100° e b = 110°. Quanto mede o ângulo x?

■ a) 30°

b) 50°

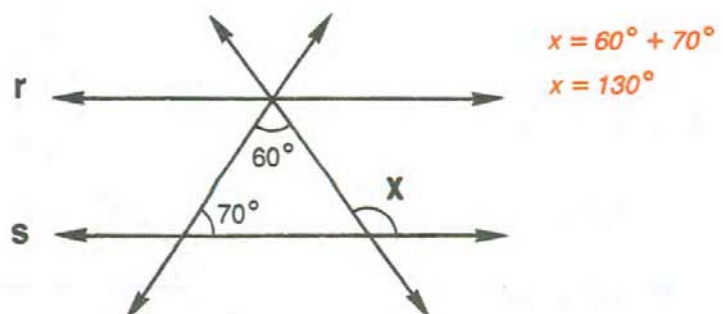
c) 80°

d) 100°

19) (UF-MA) As retas r e s da figura são paralelas. Qual a medida do ângulo x?

a) 50°

b) 70°

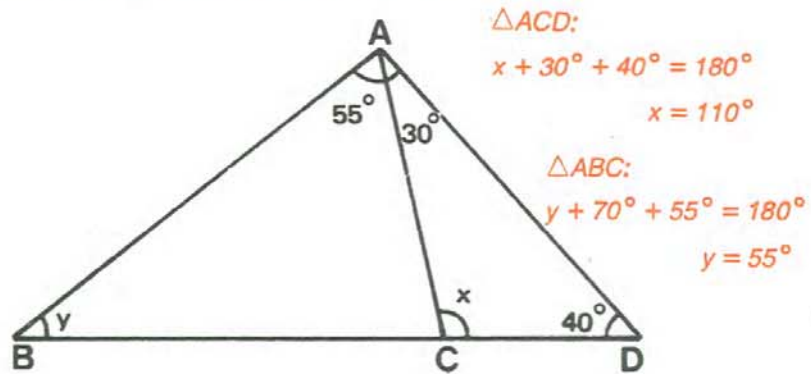
c) 110°

■ d) 130°

20) Na figura abaixo, as medidas de x e y são, respectivamente:

■ a) 110° e 55°

b) 100° e 65°

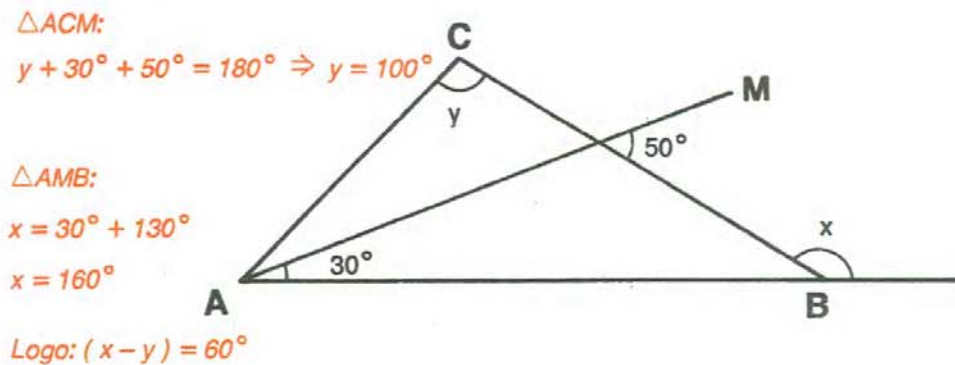
c) 110° e 65°

d) 100° e 55°

21) (FCMSC-SP) No △ ABC abaixo, $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo Â. Então (x – y) vale:

a) 20°

b) 30°

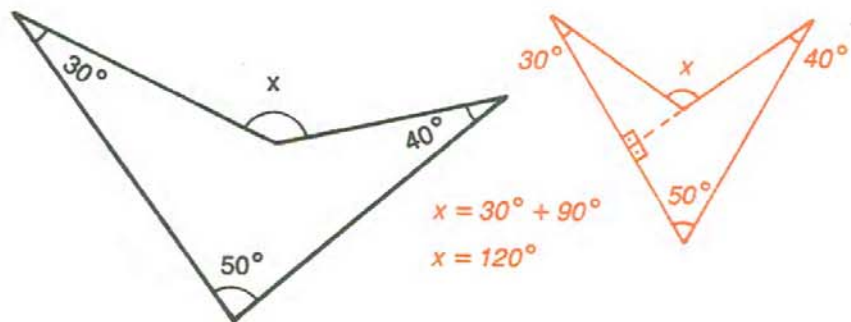
■ c) 60°

d) 100°

22) (UMC-SP) Na figura abaixo, a medida do ângulo x é:

a) 70°

b) 80°

c) 100°

■ d) 120°

23) Na figura abaixo, os valores de x e y são, respectivamente:

a) 50° e 40°

■ b) 40° e 30°

c) 30° e 40°

d) 40° e 50°

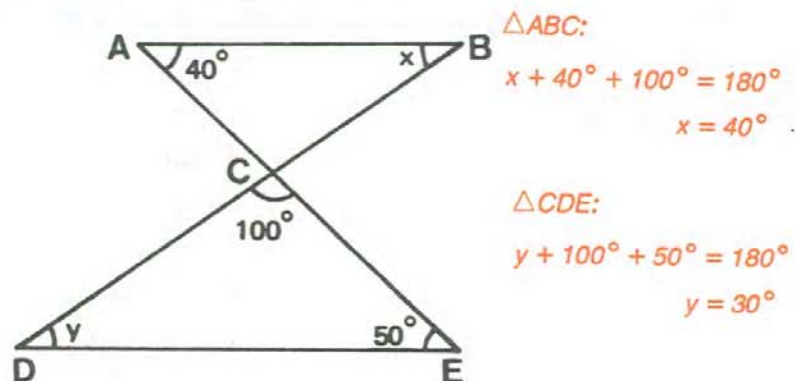
△ABC:

$x + 40° + 100° = 180°$

$x = 40°$

△CDE:

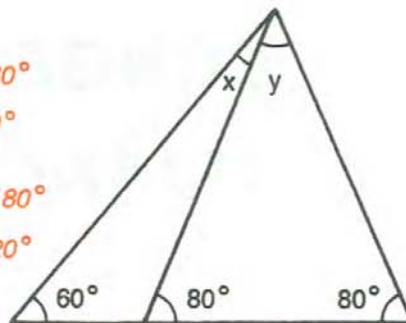
$y + 100° + 50° = 180°$

$y = 30°$

24) (UF-MG) Os ângulos x e y da figura medem:

a) $x = 20°$, $y = 30°$

b) $x = 30°$, $y = 20°$

c) $x = 60°$, $y = 20°$

■ d) $x = 20°$, $y = 20°$

25) (UC-MG) Nesta figura, o ângulo AD̂C é reto. O valor, em graus, do ângulo CB̂D é:

a) 95

■ b) 100

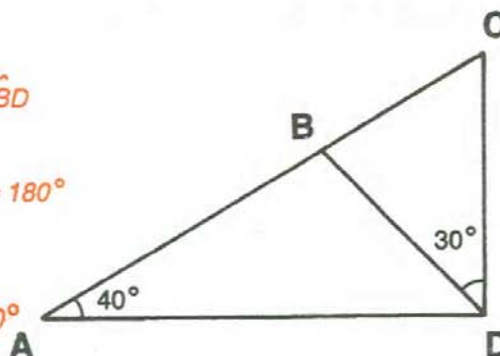
c) 105

d) 110

Seja x a medida de AB̂D

$x + 40° + 60° = 180°$

$x = 80°$

Logo: $C\hat{B}D = 100°$

26) (MACKENZIE-SP) Na figura, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. O valor de x é:

a) 90°

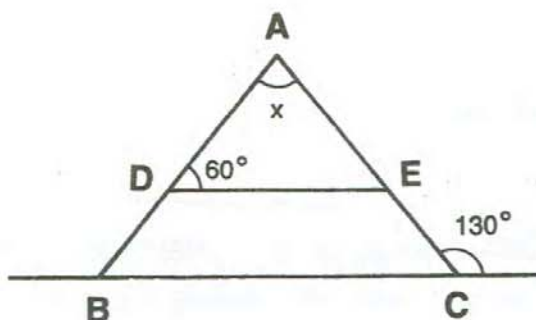
b) 80°

■ c) 70°

d) 60°

$m(\hat{E}) = 50°$

$x + 60° + 50° = 180°$

$x = 70°$

27) (PUC-SP) Na figura, r e s são paralelas. Então, â, b̂, ĉ e d̂ medem nessa ordem:

$a = d = 70°$

$c + 30° + 70° = 180°$

$c = 80°$

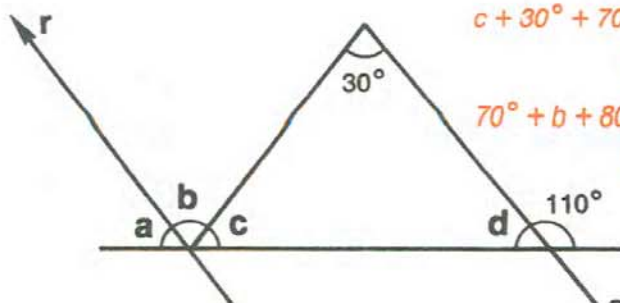
$70° + b + 80° = 180°$

$b = 30°$

a) 60°, 30°, 70°, 60°

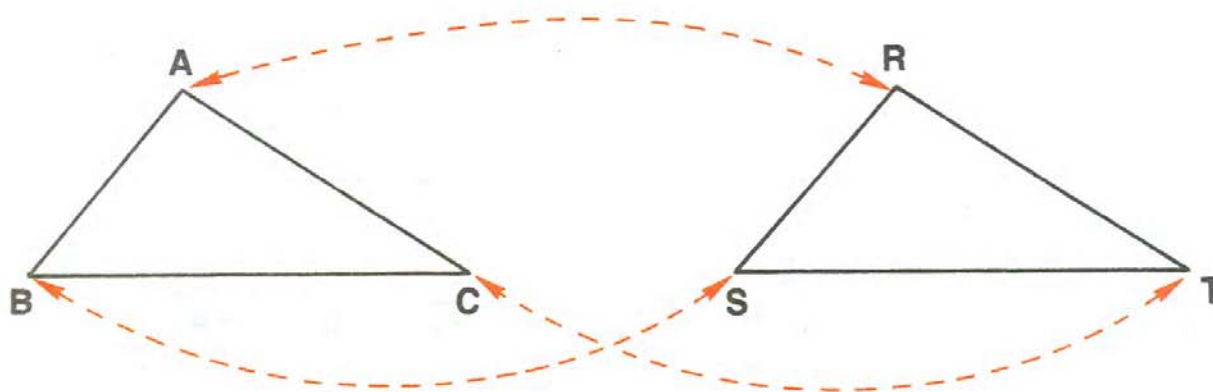
■ b) 70°, 30°, 80°, 70°

c) 60°, 45°, 80°, 60°

d) 80°, 45°, 70°, 80°

16

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Intuitivamente, dois triângulos ABC e RST são congruentes se for possível transportar um deles sobre o outro, de modo que eles coincidam.

DEFINIÇÃO

> Dois triângulos são chamados **congruentes** quando os lados e os ângulos correspondentes são congruentes.

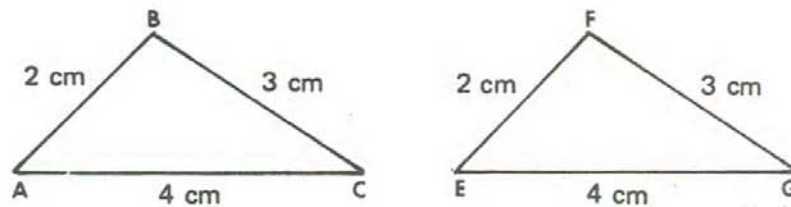
Logo:

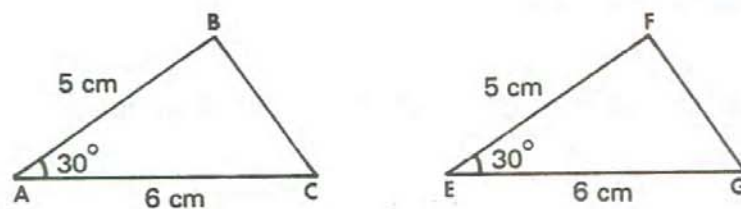
$$\triangle ABC \cong \triangle RST \Leftrightarrow \begin{matrix} \overline{AB} \cong \overline{RS} \\ \overline{BC} \cong \overline{ST} \\ \overline{CA} \cong \overline{TR} \end{matrix} \quad e \quad \begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{R} \\ \hat{B} \cong \hat{S} \\ \hat{C} \cong \hat{T} \end{matrix}$$

CASOS DE CONGRUÊNCIA

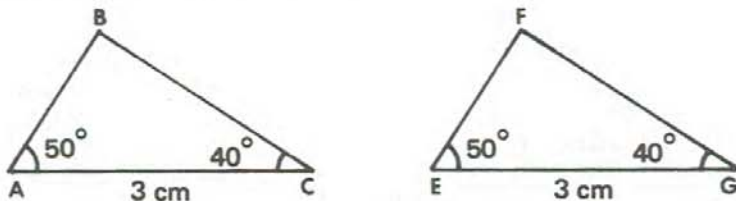
O estudo dos casos de congruência de dois triângulos tem por finalidade estabelecer o menor número de condições para que dois triângulos sejam congruentes.

1º CASO: L . L . L . (lado, lado, lado)

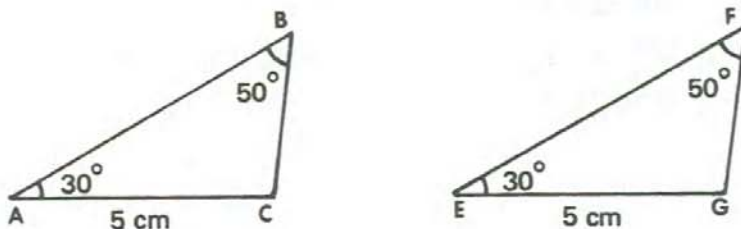
Dois triângulos que têm os três lados respectivamente congruentes são congruentes.

2º CASO: L . A . L . (lado, ângulo, lado)

Dois triângulos que têm dois lados e o ângulo por eles formado respectivamente congruentes são congruentes.

3º CASO: A . L . A . (ângulo, lado, ângulo)

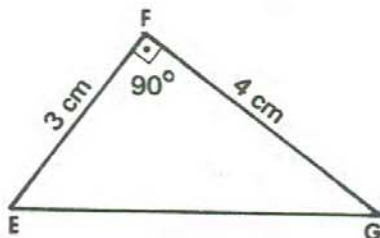
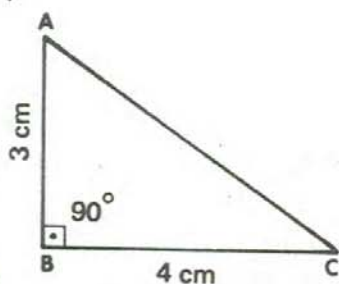
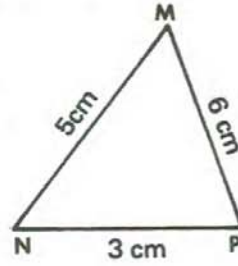
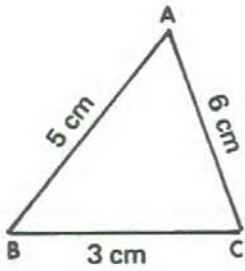
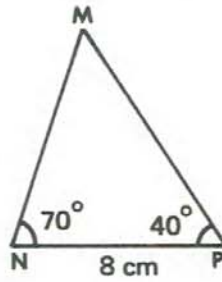
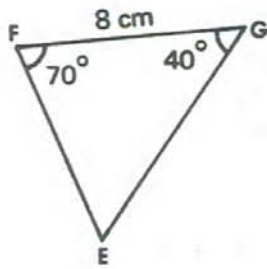
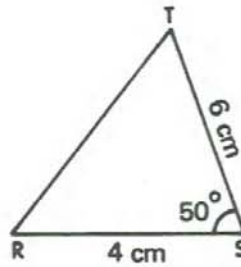
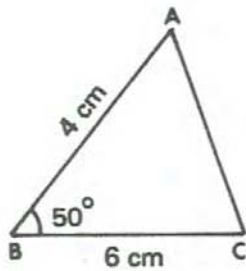
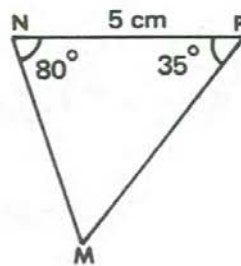
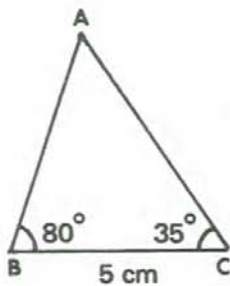
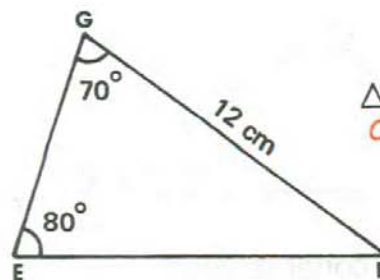
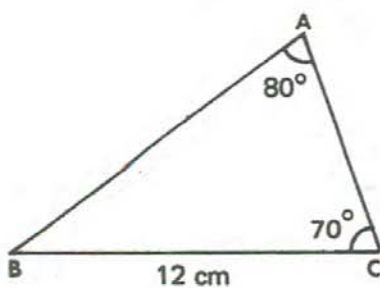
Dois triângulos que têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{E} \\ \overline{AC} \cong \overline{EG} \\ \hat{C} \cong \hat{G}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle EFG$$

4º CASO: L . A . A_o . (lado, ângulo, ângulo oposto)

Dois triângulos que têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} \cong \overline{EG} \\ \hat{A} \cong \hat{E} \\ \hat{B} \cong \hat{F}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle EFG$$

EXERCÍCIOS

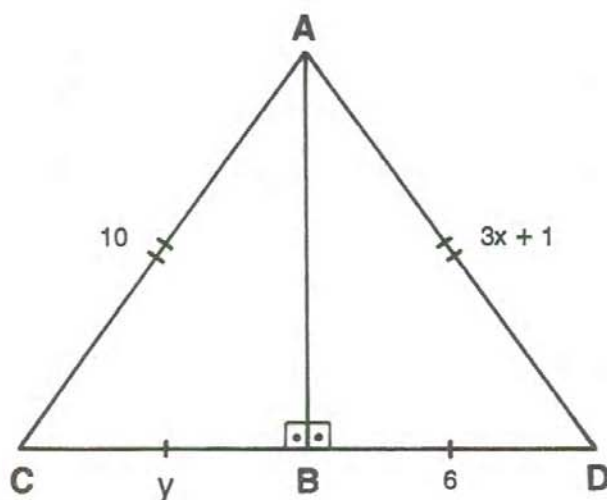
1) Cite, em cada item, o caso de congruência dos triângulos.

a)

b)
A
5 cm
6 cm
B
3 cm
C
M
5cm
6 cm
N
3 cm
P
△ ABC ≅ △ MNP
Caso: L.L.L.
c)
F
8 cm
G
70°
40°
E
M
70°
40°
N
8 cm
P
△ EFG ≅ △ MNP
Caso: A.L.A.
d)
A
4 cm
50°
B
6 cm
C
T
6 cm
50°
R
4 cm
S
△ ABC ≅ △ RST
Caso: L.A.L.
e)
A
80°
35°
B
5 cm
C
N
5 cm
P
80°
35°
M
△ ABC ≅ △ MNP
Caso: A.L.A.
f)
A
80°
70°
B
12 cm
C
G
70°
12 cm
80°
E
F
△ ABC ≅ △ EFG
Caso: L.A.A₀

2) Na figura, os triângulos ABC e ABD são congruentes. Calcule x e y:

$y = 6$

$3x + 1 = 10$

$3x = 9$

$x = 3$

3) Na figura, os triângulos ABC e CDE são congruentes. Calcule x e y:

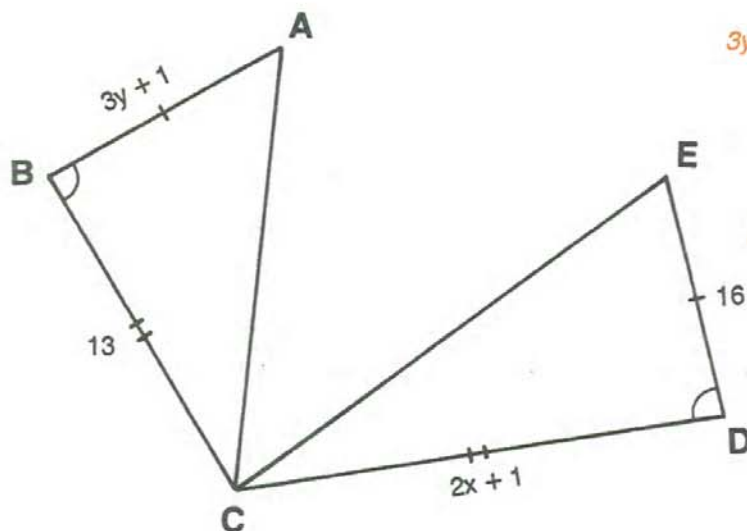
$3y + 1 = 16$

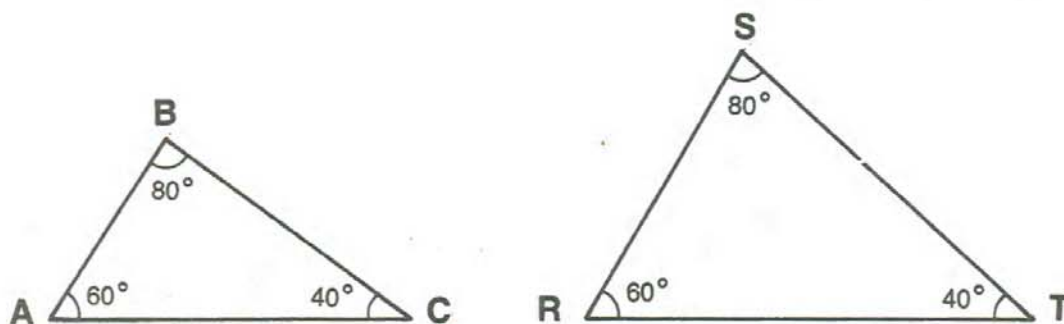
$3y = 15$

$y = 5$

$2x + 1 = 13$

$2x = 12$

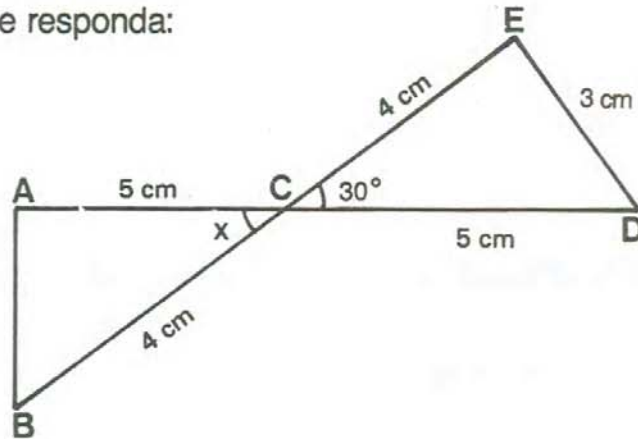
$x = 6$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Os triângulos da figura ABC e RST têm os mesmos ângulos.

São triângulos congruentes? *Não.*

2) Responda:

a) Dois triângulos congruentes, têm o mesmo perímetro? *Sim.*

b) Dois triângulos congruentes têm a mesma área? *Sim.*

3) Observe a figura e responda:

a) Quanto mede o ângulo x? *30°*

b) Quanto mede o lado $\overline{AB}$? *3 cm*

TESTES

1) Se o △ ABC é congruente ao △ STR, então x e y são, respectivamente, iguais a:

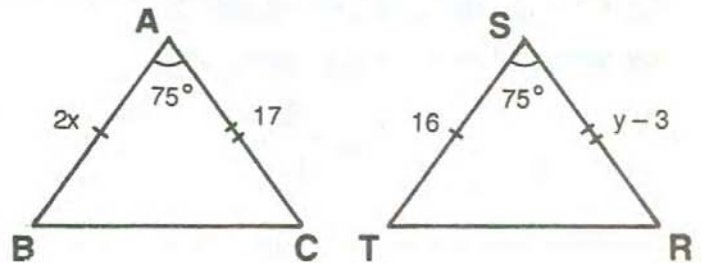
a) 8 e 14

■ b) 8 e 20

c) 20 e 8

d) 8,5 e 19

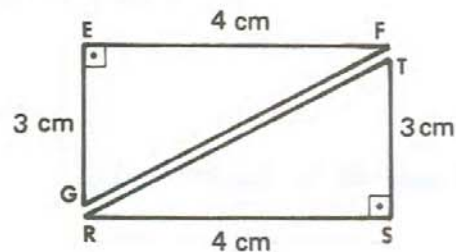
$2x = 16 \Rightarrow x = 8$

$y - 3 = 17 \Rightarrow y = 20$

2) Os triângulos abaixo são congruentes pelo caso:

a) L . L . L .

■ b) L . A . L.

c) A . L . A.

d) L . A . A_o

3) Dois triângulos congruentes têm:

a) mesma área e perímetros diferentes.

b) mesmo perímetro e áreas diferentes.

■ c) mesmo perímetro e mesma área.

d) n.d.a.

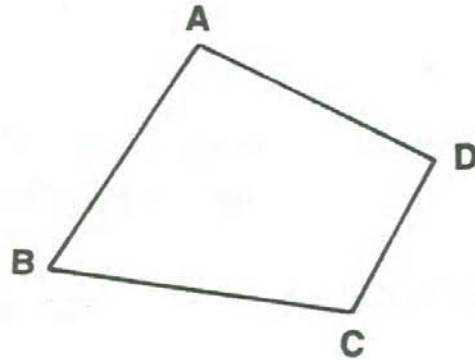
17

QUADRILÁTEROS

CONCEITO

Quadrilátero é um polígono de quatro lados.

No quadrilátero ao lado, destacamos:

- **vértices**: A, B, C, D
- **lados**: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
- **ângulos internos**: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$
- **lados opostos**: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
- **ângulos opostos**: $\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$

Lembre-se de que um quadrilátero é convexo quando qualquer segmento com extremidades no quadrilátero está contido nele.

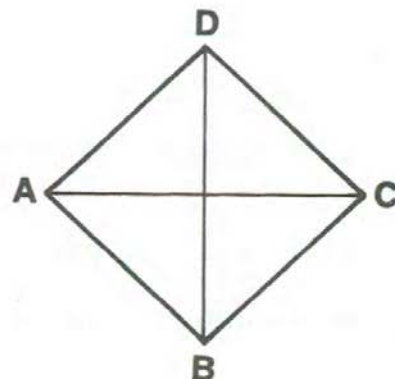
Quadrilátero convexo

Quadrilátero não-convexo

Estudaremos apenas os quadriláteros convexos.

DIAGONAL

O segmento que une dois vértices não consecutivos é chamado **diagonal.**

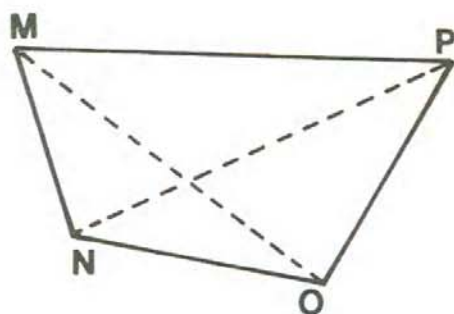
Na figura, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais.

EXERCÍCIOS

1) Observe o quadrilátero e responda:

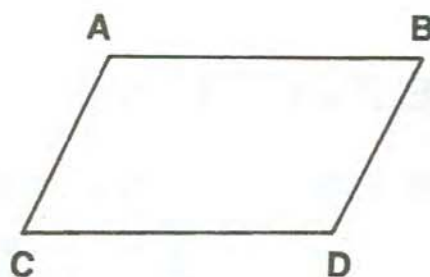
a) Quais são os lados? $\overline{MN}, \overline{NO}, \overline{OP}, \overline{PM}$

b) Quais são os vértices? *M, N, O, P*

c) Quais são os ângulos internos? $\hat{M}, \hat{N}, \hat{O}, \hat{P}$

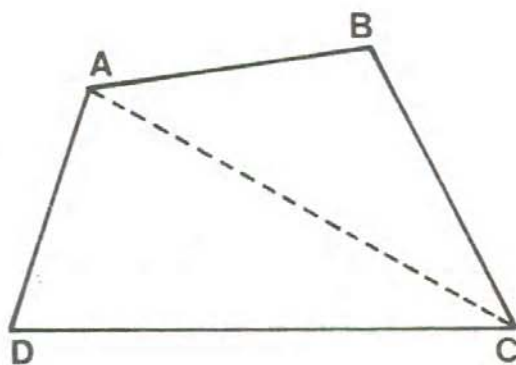
d) Quais são as diagonais indicadas? $\overline{MO}, \overline{NP}$

2) Considere o quadrilátero ABCD.

a) Nomeie os dois pares de lados opostos.
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

b) Nomeie os dois pares de ângulos opostos.
$\hat{A}$ e $\hat{D}$; $\hat{B}$ e $\hat{C}$

3) O perímetro de um quadrilátero mede 41 cm. Quanto mede cada lado se as medidas são representadas por x, $x + 2$, $3x + 1$ e $2x - 4$?
$x + x + 2 + 3x + 1 + 2x - 4 = 41$ *Resp.: 6 cm*

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO

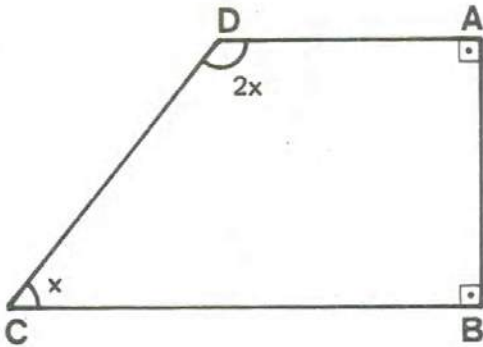
ABCD é um quadrilátero convexo e a diagonal $\overline{AC}$ o divide em dois triângulos.

Veja:

A soma dos ângulos internos dos dois triângulos é a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

Logo:

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é: $180° + 180° = 360°$

Exercício Resolvido.

Na figura abaixo, calcular o valor de x.

Solução:

$$x + 2x + 90° + 90° = 360°$$

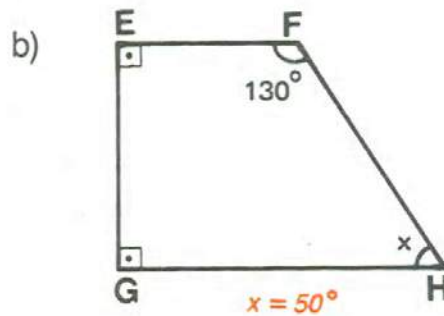
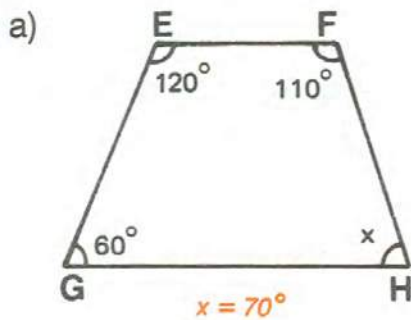
$$2x + x = 360° - 90° - 90°$$

$$3x = 180°$$

$$x = \frac{180°}{3}$$

$$x = 60°$$

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor de x nos quadriláteros:

a)

x = 70°

b)

E F 130° x G H

x = 50°

2) Calcule o valor de x nos seguintes quadriláteros:

a)

x = 20°

b)

E F x + 50° 2x – 30° x x – 20° G H

x = 72°

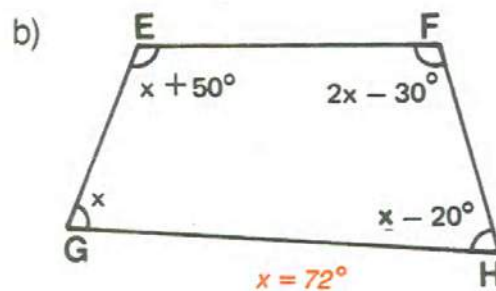
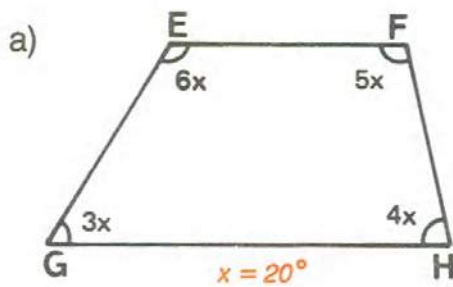
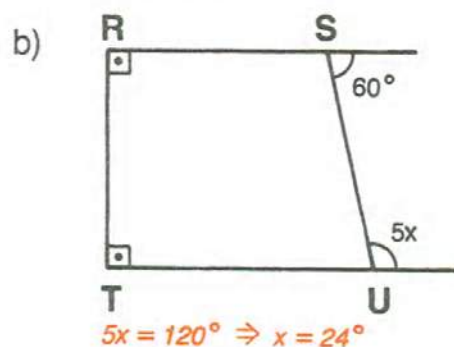
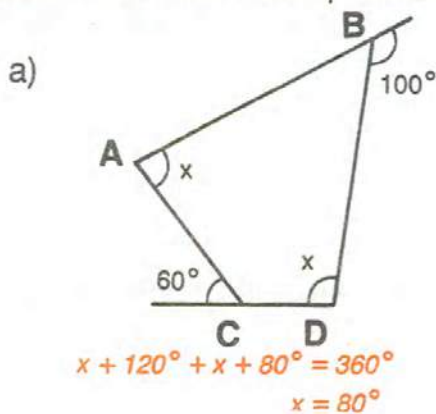
3) Calcule o valor de x nos quadriláteros:

a)

x + 120° + x + 80° = 360°

x = 80°

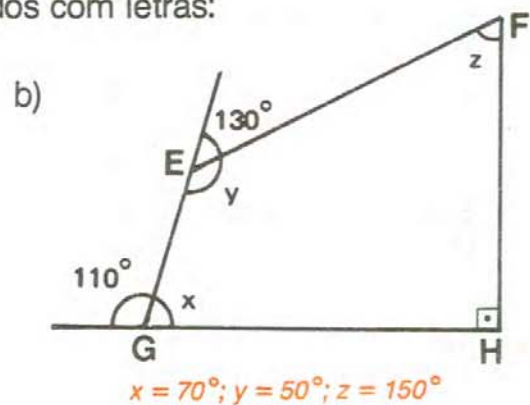
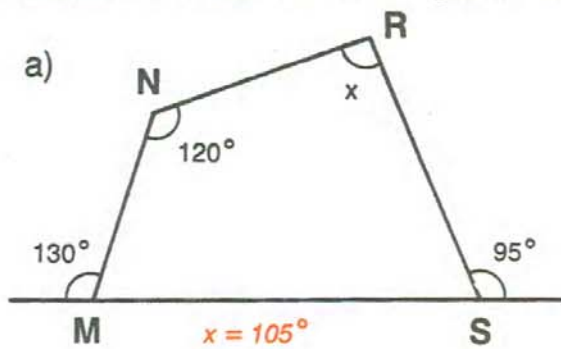
b)

5x = 120° ⇒ x = 24°

4) Calcule as medidas dos ângulos indicados com letras:

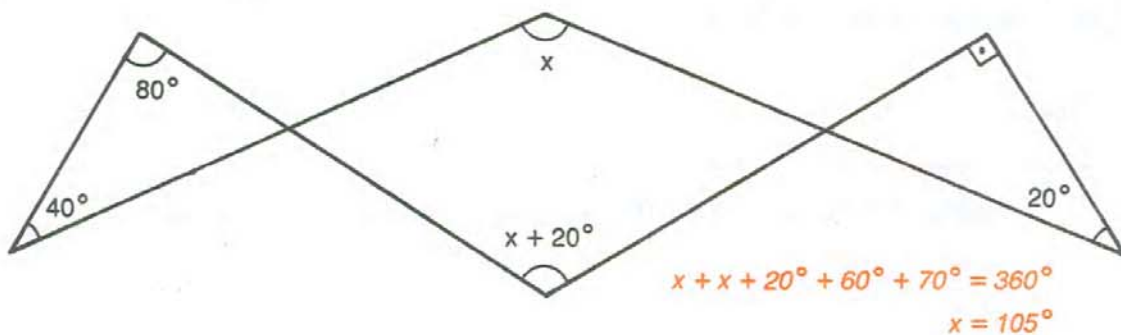
a)

$x = 105°$

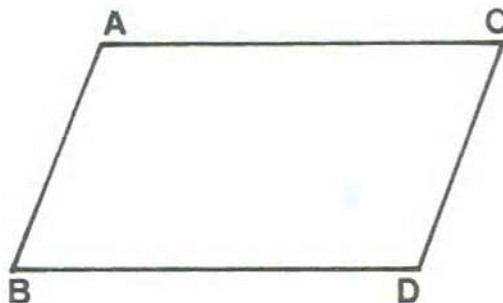
b)

$x = 70°; y = 50°; z = 150°$

5) Calcule x na figura:

$x + x + 20° + 60° + 70° = 360°$

$x = 105°$

6) Calcule os ângulos internos de um quadrilátero sabendo que eles medem $x, 2x, \frac{x}{2}$ e $\frac{3x}{2}$. $x + 2x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = 360°$ *Resp.: 72°*

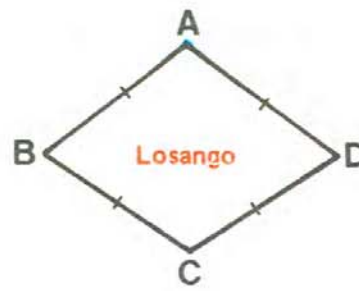
PARALELOGRAMOS

Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.

Na figura, temos:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

Tipos de Paralelogramos

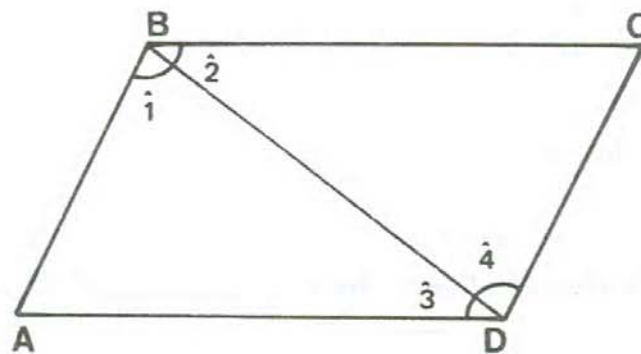
- **Retângulo** – Possui quatro ângulos retos.
- **Losango** – Possui os quatro lados congruentes.
- **Quadrado** – Possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

Note que:

- Todo quadrado é um losango.
- Todo quadrado é um retângulo.

TEOREMA:

> Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Prova:

Seja o paralelogramo ABCD. Vamos provar que $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$

a) Tracemos a diagonal $\overline{BD}$ e consideremos os triângulos ABD e CDB.

b) Temos:

- $\hat{1} \cong \hat{4}$ (alternos internos)
- $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (comum)
- $\hat{2} \cong \hat{3}$ (alternos internos)

$\xrightarrow{A.L.A.}$ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

Então, os ângulos correspondentes são congruentes, ou seja: $\hat{A} \cong \hat{C}$.

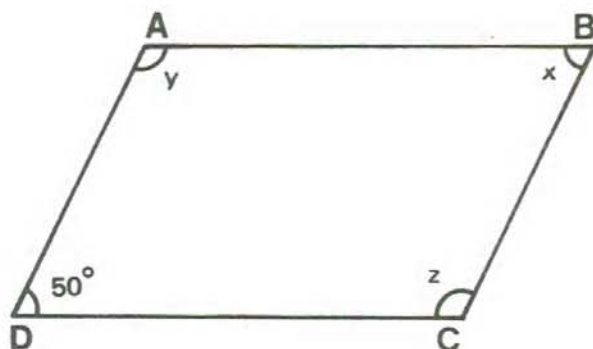
c) Por outro lado:

- $\hat{1} \cong \hat{4}$
- $\hat{2} \cong \hat{3}$

$\Rightarrow \hat{1} + \hat{2} \cong \hat{3} + \hat{4}$

Logo: $\hat{B} \cong \hat{D}$

Exercícios Resolvidos.

1 Determinar as medidas de x, y e z no paralelogramo abaixo:

Solução:

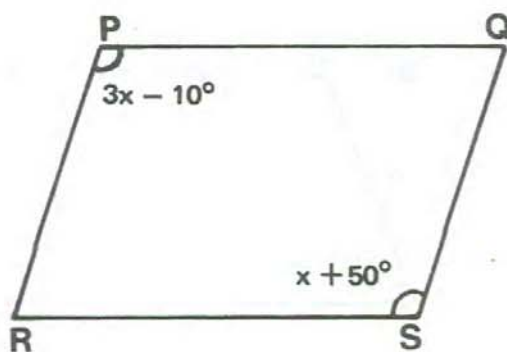
a) Pelo teorema anterior: $x = 50°$

b) $y + 50° = 180°$ **(os ângulos não-opostos são suplementares)**

$y = 180° - 50°$

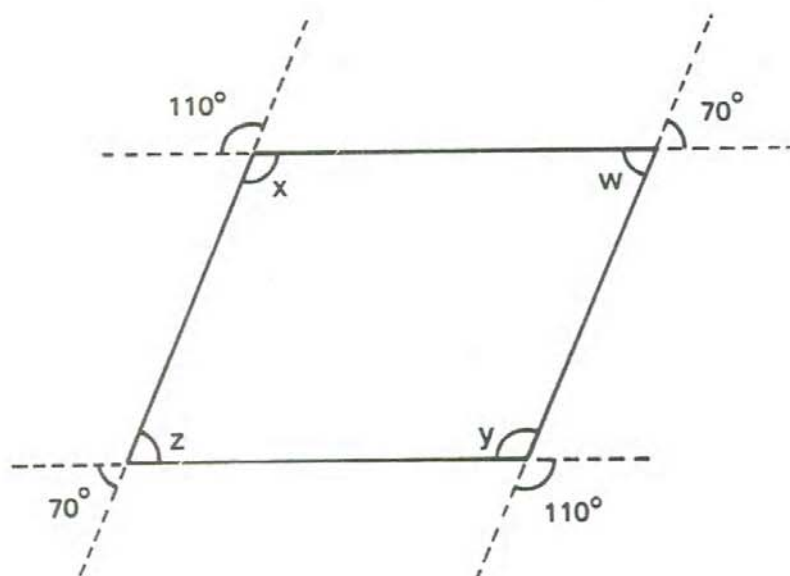
$y = 130°$

c) Pelo teorema anterior: $z = 130°$

2 Calcule o valor de x no paralelogramo abaixo:

Solução:

$$3x - 10° = x + 50°$$
$$3x - x = 50° + 10°$$
$$2x = 60°$$
$$x = 30°$$

EXERCÍCIOS

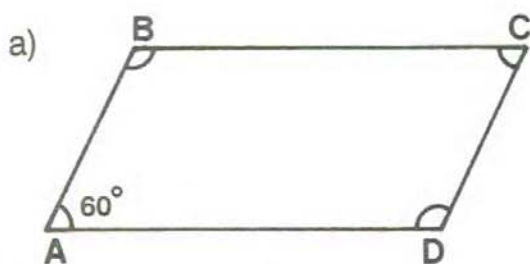
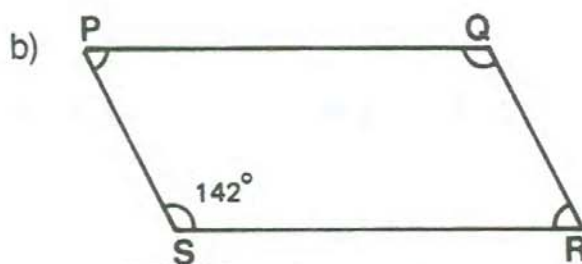
1) Observe a figura e calcule as medidas de x, y, z e w.

x = 110°
y = 110°
z = 70°
w = 70°

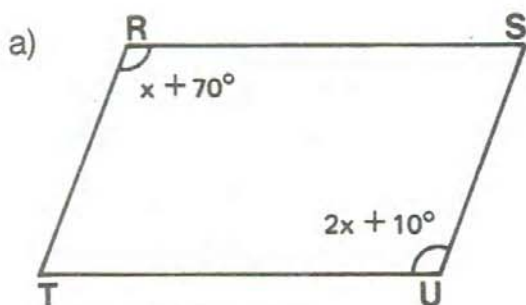
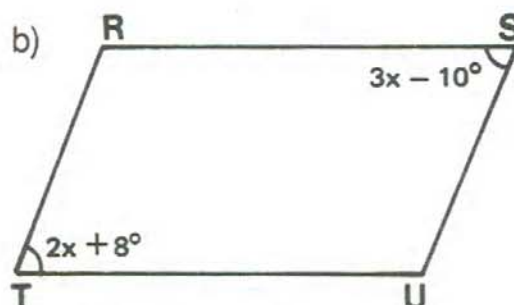
2) Baseado nos resultados do exercício anterior, responda:
Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes? *Sim.*

3) Calcule os ângulos indicados nos paralelogramos seguintes:

a)

$\hat{B} = 120°$; $\hat{C} = 60°$; $\hat{D} = 120°$

b)

$\hat{P} = 38°$; $\hat{R} = 38°$; $\hat{Q} = 142°$

4) Calcule o valor de x nos paralelogramos abaixo:

a)

$2x + 10° = x + 70°$
$x = 60°$

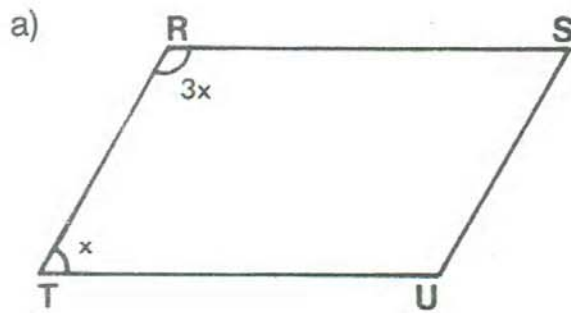
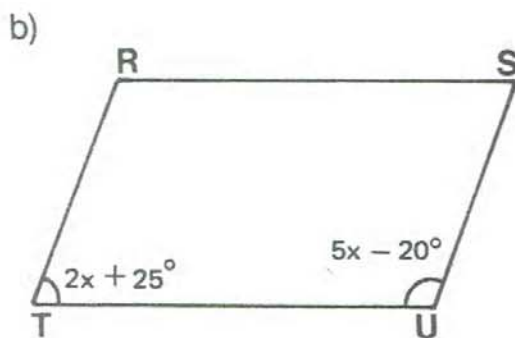
b)

$3x - 10° = 2x + 8°$
$x = 18°$

5) Calcule o valor de x nos paralelogramos abaixo:

a)

$3x + 3x + x + x = 360° \Rightarrow x = 45°$

b)

[illegible]$x - 20° = 180° \Rightarrow x = 25°$

6) Calcule o valor de x, y e z nos losangos abaixo:

a)

$x + x + 5x + 5x = 360° \Rightarrow x = 30°$

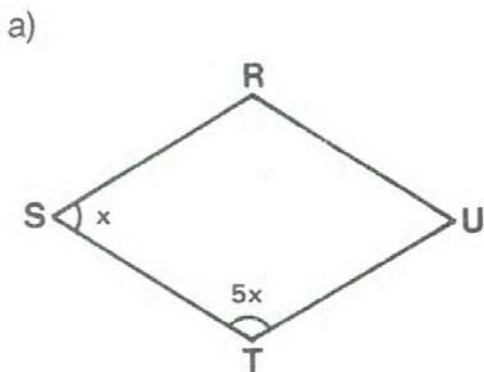
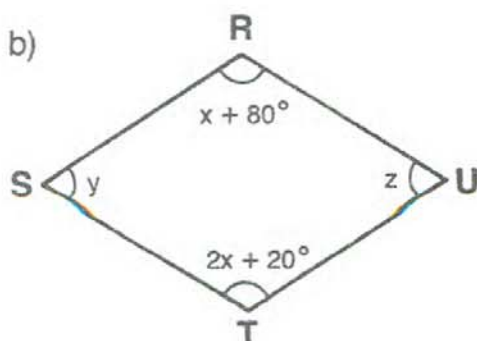
b)

R

x + 80°

S y z U

2x + 20°

T

$2x + 20° = x + 80°$

$x = 60°$

$y = 40°$

$z = 40°$

7) Calcule o valor de x, y, z e w nos paralelogramos abaixo:

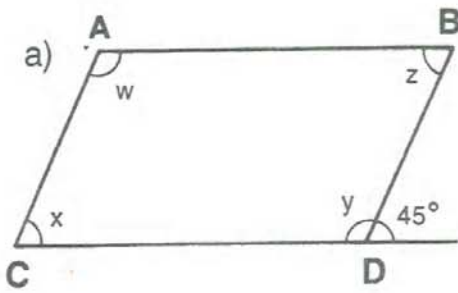
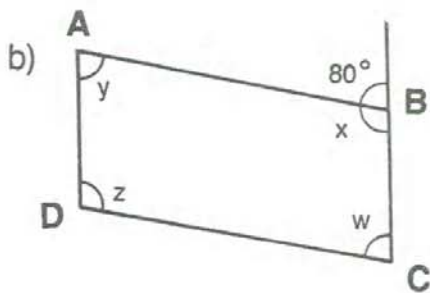
a)

$y = 135°$

$w = 135°$

$x = 45°$

$z = 45°$

b)

$x = 100°$

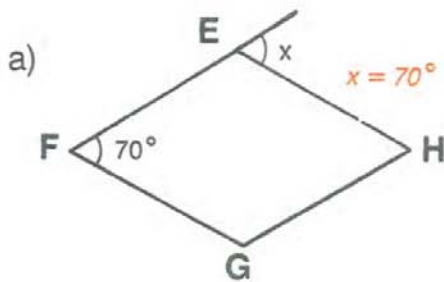
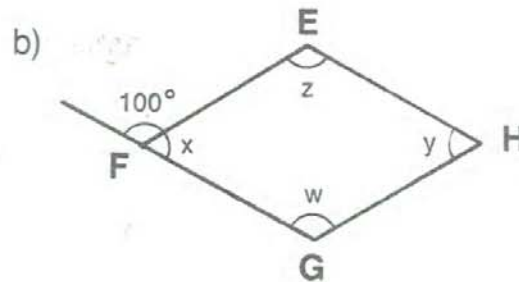
$y = 80°$

$z = 100°$

$w = 80°$

8) Calcule o valor de x, y, z e w nos losangos abaixo:

a)

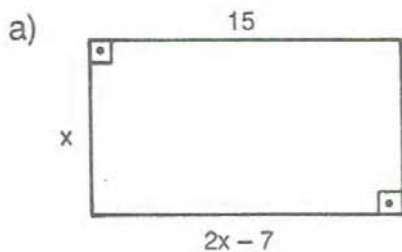
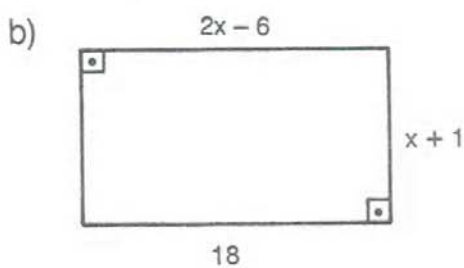
b)

9) Qual o perímetro dos retângulos?

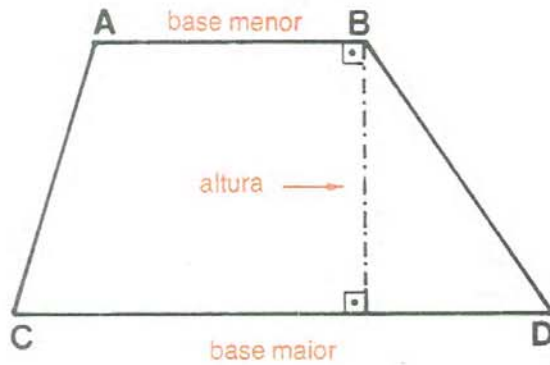
a)

$2x - 7 = 15$

$x = 11$

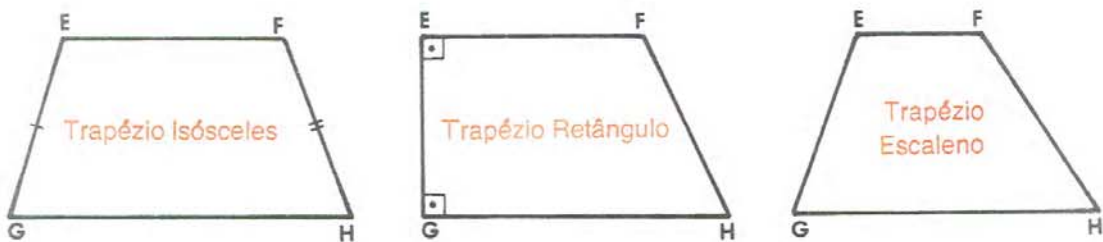
Resp.: 52

b)

TRAPÉZIO

Trapézio é o quadrilátero que possui dois lados paralelos (que são chamados de base).

Na figura, temos:
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

A distância entre as bases chama-se altura.

TIPOS DE TRAPÉZIO

- **Isósceles** – Os lados não-paralelos são congruentes.
- **Retângulo** – Tem dois ângulos retos.
- **Escaleno** – Os lados não-paralelos não são congruentes.

EXERCÍCIOS

1) Num trapézio, como são chamados os lados paralelos? *Base.*

2) Calcule o valor de x nas figuras:

a)

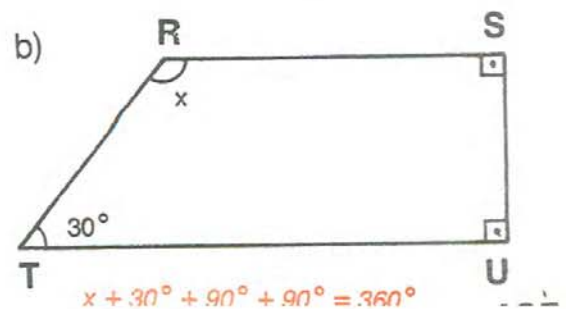
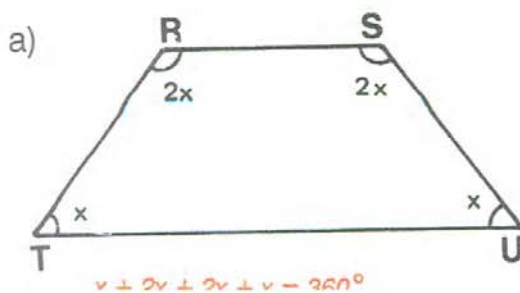
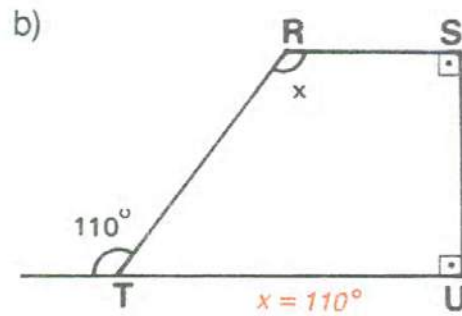
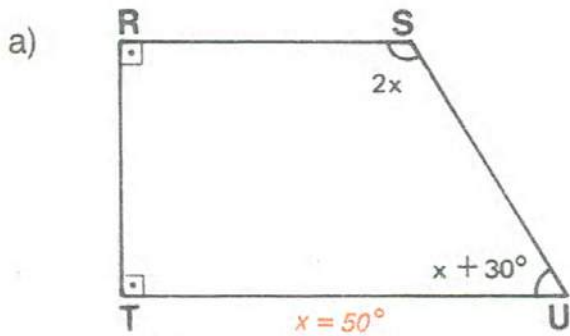
$x + 2x + 2x + x = 360°$

b)

$x + 30° + 90° + 90° = 360°$

3) Calcule o valor de x nas figuras:

a)

b)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Responda:
   a) Quantos lados possui um quadrilátero? *4*
   b) Quantos vértices possui um quadrilátero? *4*
   c) Quantas diagonais possui um quadrilátero? *2*

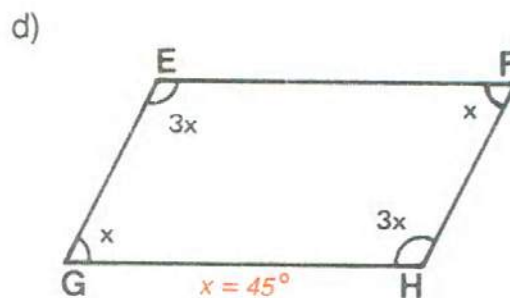
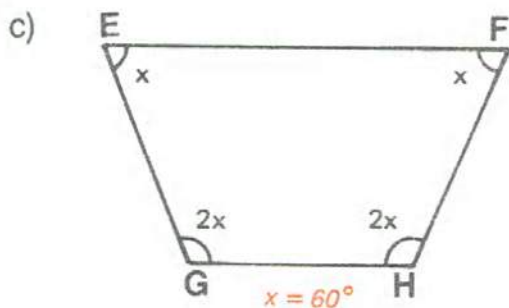
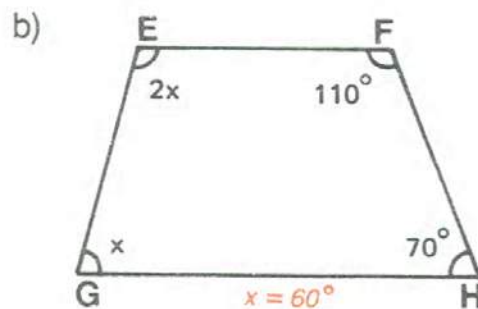
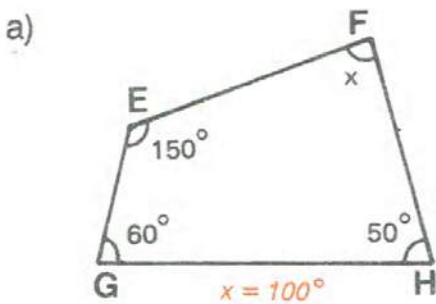
2) Quanto vale a soma dos ângulos internos de um quadrilátero? *360°*

3) Calcule o valor de x nos seguintes quadriláteros:

a)

b)

c)

d)

4) Calcule os ângulos de um quadrilátero sabendo que eles medem x, $x + 20°$, $x + 45°$ e $x + 15°$.

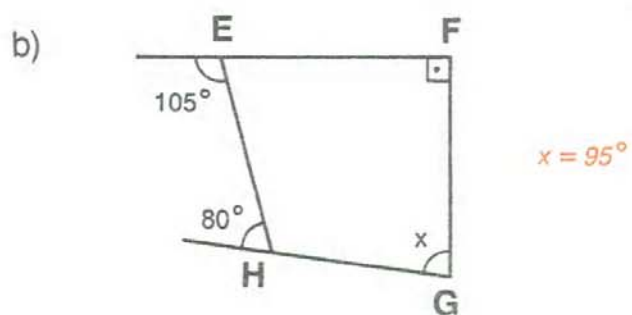
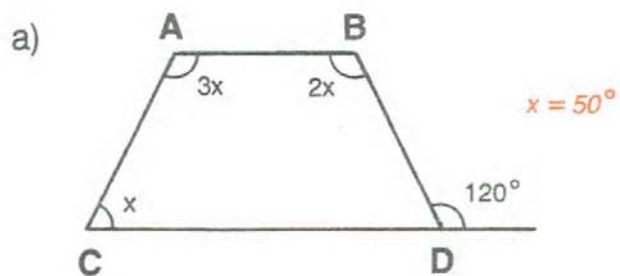
$x + x + 20° + x + 45° + x + 15° = 360°$ *Resp.: 70°*

5) Calcule o valor de x nos quadriláteros:

a)

x = 50°

b)

x = 95°

6) Calcule o valor de x e y nos paralelogramos:

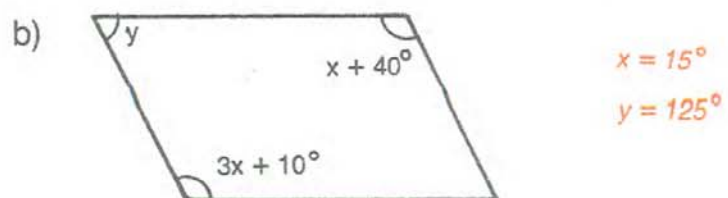
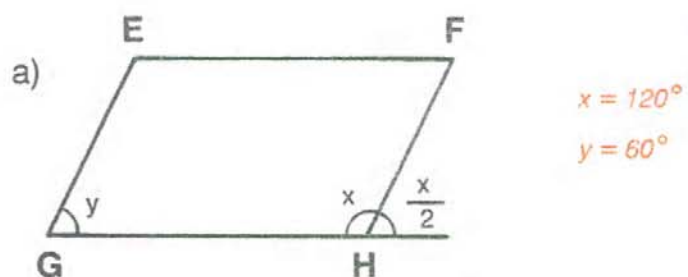
a)

x = 120°

y = 60°

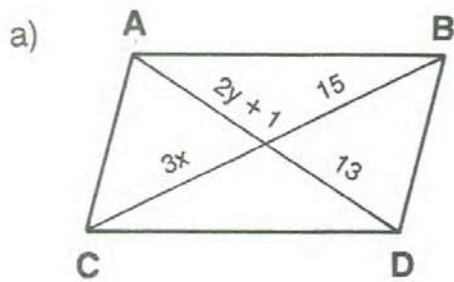
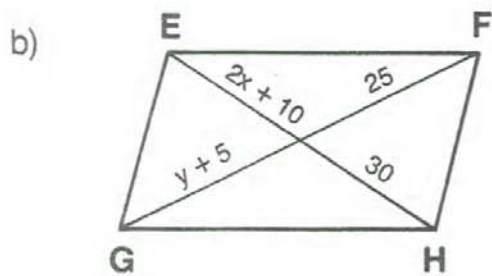
b)

x = 15°

y = 125°

7) Sabendo que as diagonais de um paralelogramo se encontram no ponto médio, determine x e y:

a)

$x = 5$
$y = 6$

b)

$x = 10$
$y = 20$

TESTES

1) Um polígono de 4 lados chama-se:
   a) quadrado
   b) retângulo
   c) paralelogramo
   ■ d) n.d.a.

2) (UNESP-SP) A afirmação **falsa** é:
   a) Todo quadrado é um losango.
   b) Todo quadrado é um retângulo.
   c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
   ■ d) Um losango pode não ser um paralelogramo.

3) (ESCOLA TÉCNICA-SP) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero são x, 2x, 3x e 4x, respectivamente. Então os ângulos desse quadrilátero são:
   a) todos iguais a 36°
   b) 18°, 36°, 54°, 72°
   ■ c) 36°, 72°, 108°, 144°
   d) 9°, 18°, 27°, 36°

$x + 2x + 3x + 4x = 360° \Rightarrow x = 36°$

4) (ACAFE-SC) Um quadrilátero convexo PQRS tem ângulos internos $\hat{P} = 90°$, $\hat{Q} = 120°$, $\hat{R} = 60°$. O ângulo interno $\hat{S}$ do quadrilátero vale:

a) 60°

b) 70°

■ c) 90°

d) 100°

$90° + 120° + 60° + \hat{S} = 360°$

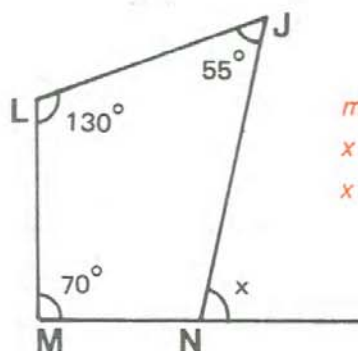
$\hat{S} = 90°$

5) Na figura ao lado, o valor de x é:

a) 55°

b) 65°

■ c) 75°

d) 85°

$m(\hat{N}) = 105°$

$x = 180° - 105°$

$x = 75°$

6) Na figura ao lado, o valor de x é:

a) 20°

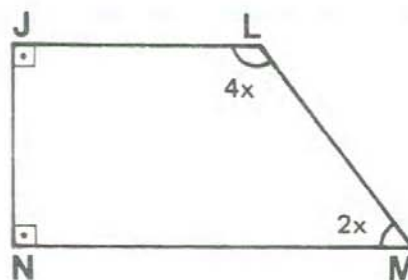
■ b) 30°

c) 35°

d) 40°

$4x + 2x + 90° + 90° = 360°$

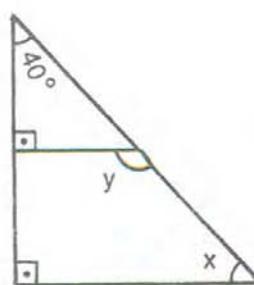
$6x = 180°$

$x = 30°$

7) Na figura, os valores de x e y são respectivamente:

a) 40° e 140°

b) 140° e 40°

c) 130° e 50°

■ d) 50° e 130°

$y = 130°$

$90° + 90° + 130° + x = 360°$

$x = 50°$

8) Os valores de x e y no paralelogramo abaixo são, respectivamente:

a) 125° e 55°

■ b) 135° e 45°

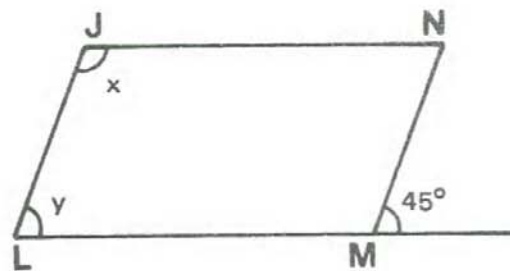
c) 145° e 35°

d) 135° e 55°

$x = 135°$

$x + y = 180°$

$135° + y = 180°$

$y = 45°$

9) No paralelogramo ao lado, o valor de x é:

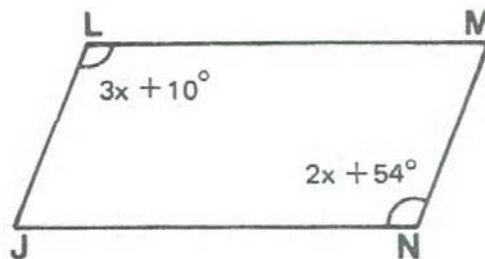
a) 32°

b) 38°

■ c) 44°

d) 64°

$3x + 10° = 2x + 54°$

$x = 44°$

10) No paralelogramo ao lado, o valor de x é:

a) 40°

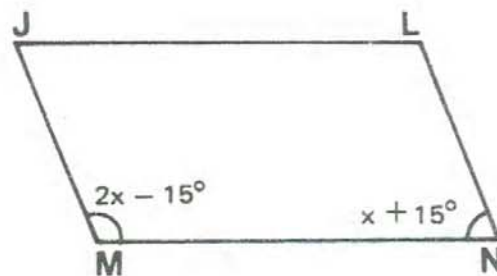
b) 45°

c) 50°

■ d) 60°

$2x - 15° + x + 15° = 180°$

$3x = 180°$

$x = 60°$

11) No losango ao lado, o valor de x é:

a) 70°

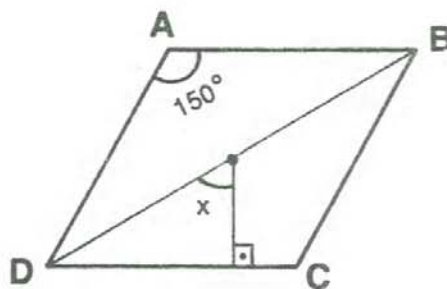
■ b) 75°

c) 60°

d) 65°

$m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 30°$

$x + 90° + \frac{30°}{2} = 180°$

$x = 75°$

12) (FUVEST-SP) Nesta figura, os ângulos â, $\hat{b}$, ĉ e $\hat{d}$ medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $2x$, $\frac{3x}{2}$ e x. O ângulo ê é reto. Qual a medida do ângulo $\hat{f}$?

a) 16°

■ b) 18°

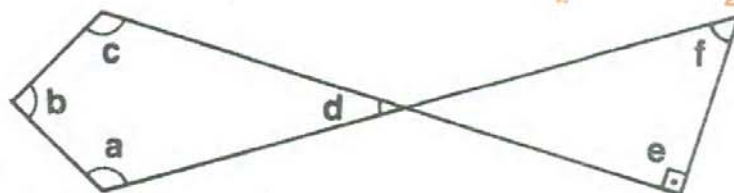
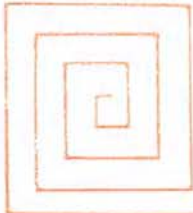
c) 20°

d) 22°

$\frac{x}{2} + 2x + \frac{3x}{2} + x = 360°$

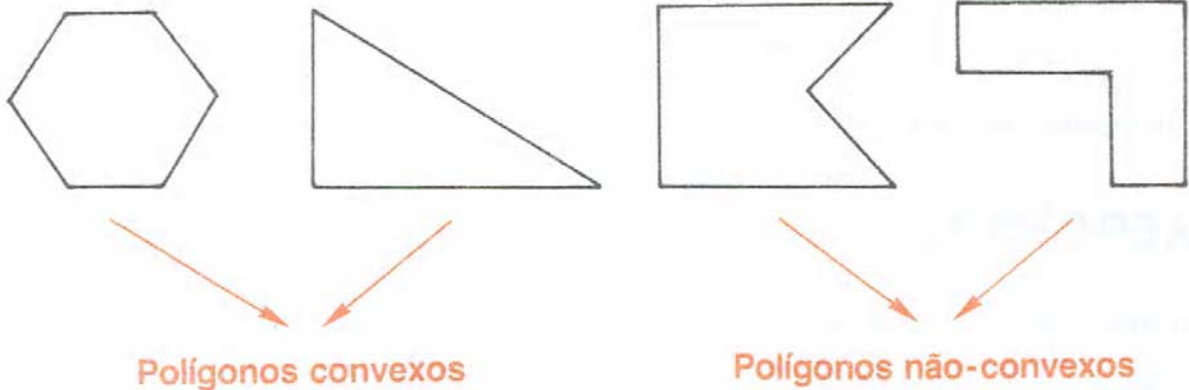
$x = 72°$

$\hat{f} + 90° + 72° = 180°$

18

POLÍGONOS CONVEXOS

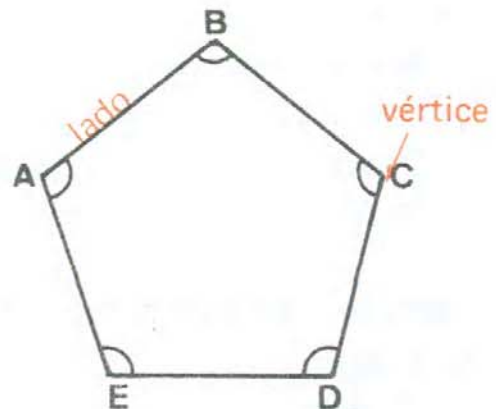
POLÍGONOS

Polígono é um conjunto de segmentos consecutivos não colineares no qual os extremos do primeiro e do último coincidem.

Exemplos:

Assim como já vimos para os quadriláteros, dizemos que um polígono é convexo quando qualquer segmento com extremidades no polígono está contido nele.

ELEMENTOS DE UM POLÍGONO

Observe o polígono ABCDE:

- A, B, C, D, E são os **vértices.**
- $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ são os **ângulos internos.**
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ são os **lados**.

NOMES DOS POLÍGONOS

Segundo o número de lados, os polígonos recebem nomes especiais:

nome	nº de lados
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8
eneágono	9
decágono	10
undecágono	11
dodecágono	12
pentadecágono	15
icoságono	20

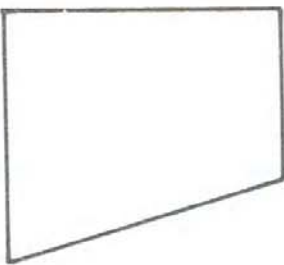
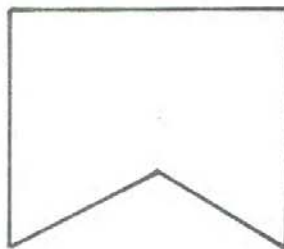
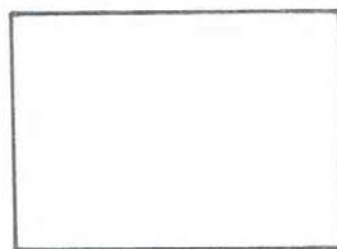
- O número de lados de um polígono é igual ao número de vértices.

EXERCÍCIOS

1) Quais são os polígonos convexos?

■ a)

b)

■ c)

2) Responda:

a) Quantos lados tem um hexágono? *6*

b) Quantos lados tem um undecágono? *11*

c) Quantos lados tem um polígono de 15 vértices? *15*

d) Quantos vértices tem um polígono de 9 lados? *9*

3) Como se chama um polígono de:

a) 5 lados? *Pentágono*

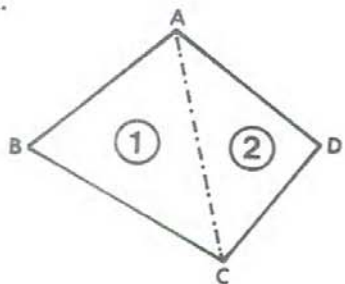
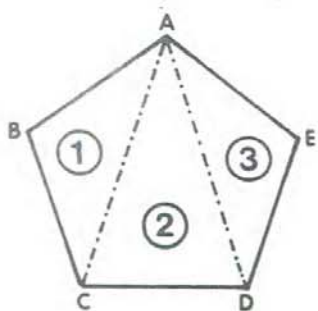
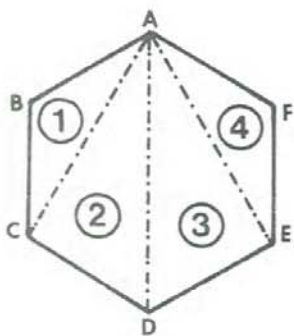
b) 12 lados? *Dodecágono*

c) 7 vértices? *Heptágono*

d) 20 vértices? *Icoságono*

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Ao traçar as diagonais que partem de um mesmo vértice de um polígono, nós o dividimos em triângulos, cujo **número de triângulos é sempre o número de lados menos dois.**

Veja:

Um polígono de n lados será dividido em (n – 2) triângulos. Logo, para obter a soma de seus ângulos internos (S_n), basta multiplicar o número de triângulos por 180°, ou seja:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

Exemplo:

Calcular a soma dos ângulos internos do octógono (n = 8)

Solução:

$$S_n = (n-2) \cdot 180°$$
$$S_8 = (8-2) \cdot 180°$$
$$S_8 = 6 \cdot 180°$$
$$S_8 = 1080°$$

Resposta: 1080°

EXERCÍCIOS

1) Calcule a soma dos ângulos internos dos seguintes polígonos:

a) pentágono $S_5 = (5-2) \cdot 180° = 540°$

b) hexágono $S_6 = (6-2) \cdot 180° = 720°$

c) eneágono $S_9 = (9-2) \cdot 180° = 1260°$

d) decágono $S_{10} = (10-2) \cdot 180° = 1440°$

e) pentadecágono $S_{15} = (15-2) \cdot 180° = 2340°$

f) icoságono $S_{20} = (20-2) \cdot 180° = 3240°$

2) Qual a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 7 vértices?

$S_7 = (7-2) \cdot 180° = 900°$

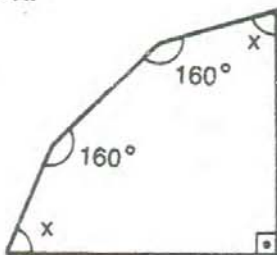
3) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 900°. Qual é o polígono?

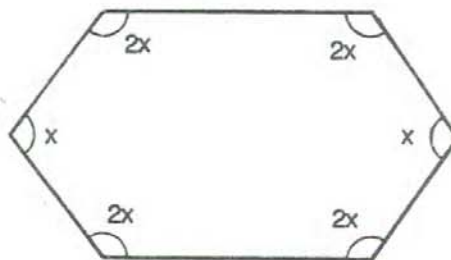
$900° = (n-2) \cdot 180° \Rightarrow n-2=5 \Rightarrow n=7$ Resp.: Heptágono

4) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 3240°. Qual é o polígono?

$3240° = (n-2) \cdot 180° \Rightarrow n-2=18 \Rightarrow n=20$ Resp.: Icoságono

5) Calcule x:

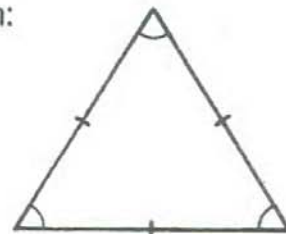
a)

$x + x + 160° + 160° + 90° = 540°$
$x = 65°$

b)

$2x + 2x + 2x + 2x + x + x = 720°$
$x = 72°$

POLÍGONO REGULAR

Chama-se **polígono regular** todo polígono convexo que tem:

a) todos os lados congruentes entre si;

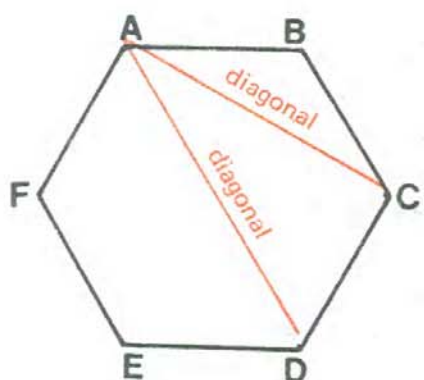
b) todos os ângulos congruentes entre si.

EXERCÍCIOS

1) Qual é a medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero? *60°*

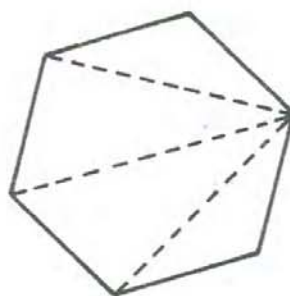
2) Calcule a medida do ângulo interno de cada polígono regular:

a) pentágono *108°*
b) hexágono *120°*
c) octógono *135°*
d) dodecágono *150°*

DIAGONAL DE UM POLÍGONO

Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

Na figura:
$\overline{AD}$ e $\overline{AC}$ são diagonais.

NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Seja um polígono de n lados:

a) cada vértice dá origem a (n – 3) diagonais.
b) os n vértices dão origem a n . (n – 3) diagonais.
c) dividimos o resultado por 2 (cada diagonal foi contada duas vezes).

Assim:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

d = número de diagonais
n = número de lados

Exemplo:

Calcule o número de diagonais de um octógono.

Solução:

Temos:

n = 8

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d = \frac{8.(8-3)}{2}$$

$$d = \frac{8.5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Resposta: 20 diagonais.

EXERCÍCIOS

1) Calcule o número de diagonais dos seguintes polígonos:

a) hexágono *(9)*
b) heptágono *(14)*
c) eneágono *(27)*
d) decágono *(35)*
e) dodecágono *(54)*
f) icoságono *(170)*

2) Quantas diagonais tem um polígono de 25 lados? *275*

3) Qual é o polígono cujo número de lados é igual ao número de diagonais?

$d = n$. Então: $n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 2n = n(n-3) \Rightarrow n = 5$ Resp.: Pentágono

4) Qual é o polígono cujo número de diagonais é o dobro do número de lados?

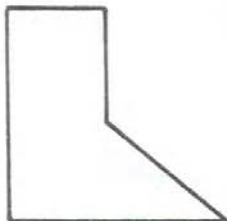
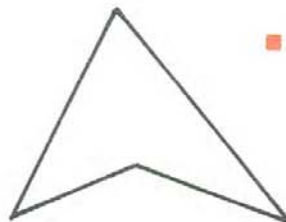
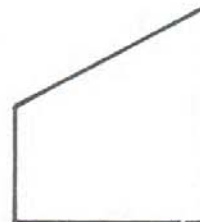
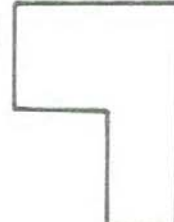
$d = 2n$. Então: $2n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 4n = n(n-3) \Rightarrow n = 7$ Resp.: Heptágono

5) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1080°. Calcule o número de diagonais desse polígono.

$1080° = (n-2) . 180° \Rightarrow n = 8$ Então: $d = 4 . 5 = 20$ Resp.: 20

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Qual a figura que representa um polígono convexo?

a)

b) c)

d)

2) Qual a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 15 vértices?
$S_{15} = (15-2) \cdot 180° = 2340°$

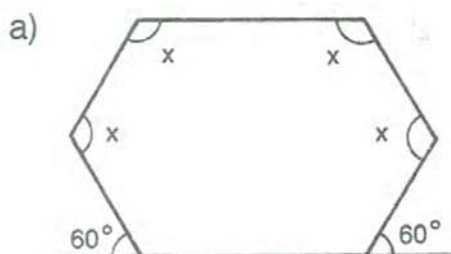
3) Calcule o número de diagonais de um dodecágono. *54*

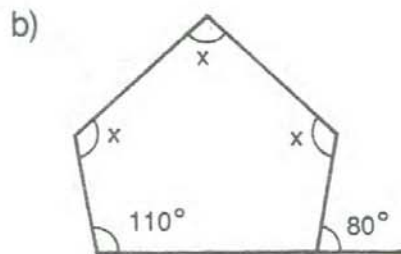
4) Qual é a medida de cada ângulo interno de um decágono regular?
$S_{10} = 1440°$. *Então:* $\hat{a} = 144°$

5) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 2340°. Calcule o número de diagonais deste polígono.

$2340° = (n-2) \cdot 180° \Rightarrow n = 15$ *Então:* $d = \dfrac{15 \cdot (15-3)}{2} = 90$

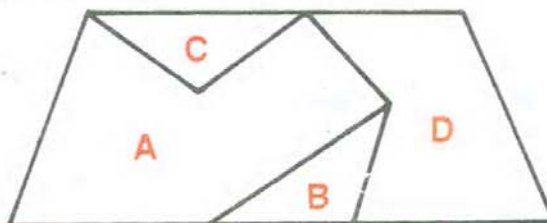
6) Calcule x:

a)

$x + x + x + x + 120° + 120° = 900° \Rightarrow x = 165°$

b)

$x + x + x + 110° + 100° = 540° \Rightarrow x = 110°$

TESTES

1) Na figura abaixo, quais são polígonos convexos?

a) A e C
b) A e B
■ c) B e C
d) B e D

2) A soma dos ângulos internos de um decágono é:

a) 8 retos
b) 10 retos
c) 12 retos
■ d) 16 retos

$S = (10-2) \cdot 180°$
$S = 8 \cdot 180°$
$S = 16 \cdot 90°$

3) A soma dos ângulos internos de um polígono é 1980°. O número de lados do polígono é:

a) 11
b) 12
■ c) 13
d) 14

$1980° = (n-2) \cdot 180°$
$n - 2 = 11$
$n = 13$

4) (PUC-SP) Cada ângulo interno de um decágono regular mede:

a) 60°
b) 72°
c) 120°
■ d) 144°

$S = (10-2) \cdot 180° = 1440°$
$a_i = \dfrac{1440°}{10} = 144°$

5) O número de diagonais de um polígono de 14 lados é:

a) 62 | c) 70
b) 68 | ■ d) 77

$d = \frac{14(14-3)}{2} = 77$

6) Um dodecágono possui:

a) 42 diagonais | c) 50 diagonais
b) 48 diagonais | ■ d) 54 diagonais

$d = \frac{12(12-3)}{2} = 54$

7) A soma do número de diagonais com o número de lados de um decágono é:

a) 35 | c) 65
■ b) 45 | d) 80

$d = \frac{10(10-3)}{2} = 35$

Então: $35 + 10 = 45$

8) (F.C.L.-SP) O número de diagonais de um octógono convexo é:

a) 16 | c) 30
b) 18 | ■ d) n.d.a.

$d = \frac{8(8-3)}{2} = 20$

9) De um dos vértices de um polígono convexo foi possível traçar 9 diagonais. Então, o polígono tem:

O número de diagonais que podemos traçar de um mesmo vértice é $n-3$.

Então: $n - 3 = 9 \Rightarrow n = 12$

a) 9 lados | c) 11 lados
b) 10 lados | ■ d) 12 lados

10) (UF-RS) O polígono cujo número de diagonais é igual ao triplo do número de lados é o:

a) pentágono | c) heptágono
b) hexágono | ■ d) eneágono

$3n = \frac{n(n-3)}{2}$

$n - 3 = 6$

$n = 9$

11) Sendo 1980° a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, então este polígono possui:

a) 44 diagonais | c) 54 diagonais
■ b) 65 diagonais | d) 72 diagonais

$1980° = (n-2) \cdot 180°$

$n - 2 = 11 \Rightarrow n = 13$

$d = \frac{13(13-3)}{2} = 65$

12) Quantos lados tem um polígono cujo número de diagonais é $\frac{3}{2}$ do número de lados?

■ a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

$\frac{3}{2}\not{n} = \frac{\not{n}(n-3)}{2}$

$n - 3 = 3$

$n = 6$

13) O valor de x na figura é:

a) 36°

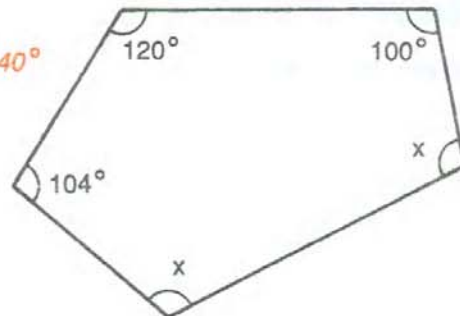
b) 72°

■ c) 108°

d) 104°

$x + x + 104° + 120° + 100° = 540°$

$2x = 216°$

$x = 108°$

14) O valor de x na figura é:

a) 95°

b) 100°

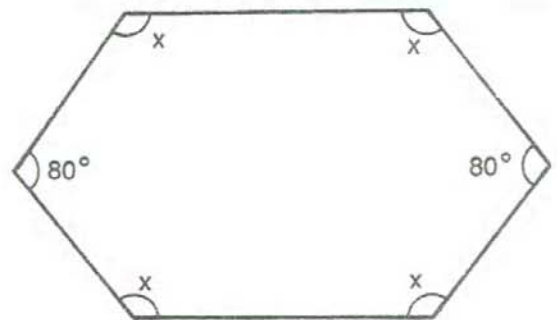
c) 120°

■ d) 140°

$x + x + x + x + 80° + 80° = 720°$

$4x + 160° = 720°$

$4x = 560°$

$x = 140°$

15) O valor de x na figura é:

■ a) 80°

b) 70°

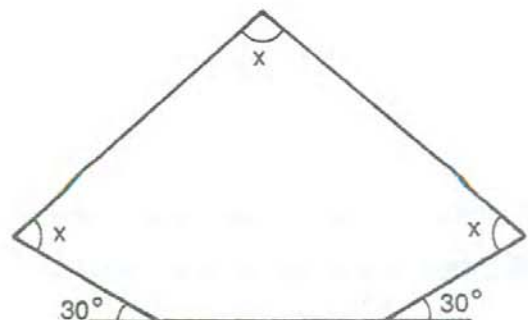
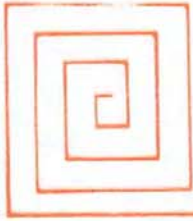
c) 60°

d) 140°

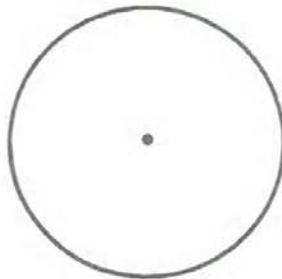
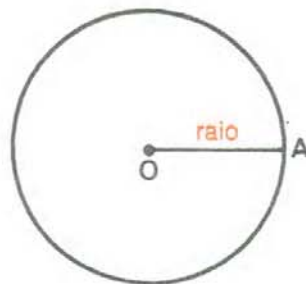
$x + x + x + 150° + 150° = 540°$

$3x = 240°$

$x = 80°$

19

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

CIRCUNFERÊNCIA

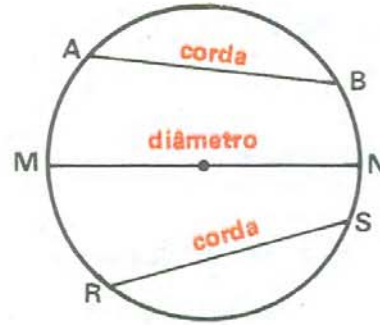
Circunferência é o conjunto de pontos de um plano, eqüidistantes de um ponto do plano chamado centro.

Qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra em um ponto da circunferência é chamado de **raio.**

Na figura:

- O é o **centro** da circunferência.
- $\overline{OA}$ é o **raio.**
- Indicação: C (O, r) (**significa**: circunferência de centro O e raio r)

CORDA E DIÂMETRO

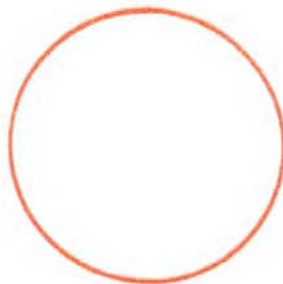
- **Corda** é o segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.
- **Diâmetro** é a corda que passa pelo centro da circunferência.

Na figura ao lado:

- $\overline{AB}$ e $\overline{RS}$ são cordas.
- $\overline{MN}$ é diâmetro.

Observe que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio, ou seja:

$$D = 2r$$

CÍRCULO

Observe as figuras e seus respectivos nomes:

Círculo é a união da circunferência e seu interior.

Convém destacar que:

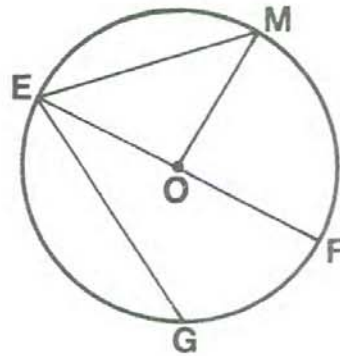
- Todo ponto da circunferência pertence ao círculo.
- Existem pontos do círculo que não pertencem à circunferência.
- O centro, o raio e o diâmetro da circunferência são também centro, raio e diâmetro do círculo.

EXERCÍCIOS

1) Observe a figura e responda:

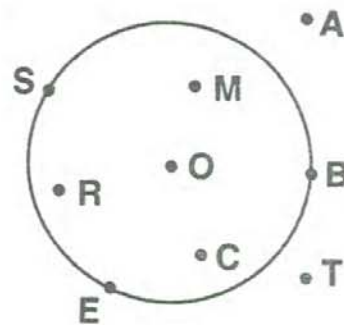
a) Quais segmentos são raios? *$\overline{OF}$, $\overline{OE}$, $\overline{OM}$*

b) Quais segmentos são cordas? *$\overline{EM}$, $\overline{EG}$, $\overline{EF}$*

d) Quais segmentos são diâmetros? *$\overline{EF}$*

2) Dos pontos indicados na figura ao lado:

a) quais são internos à circunferência? *M, O, R, C*

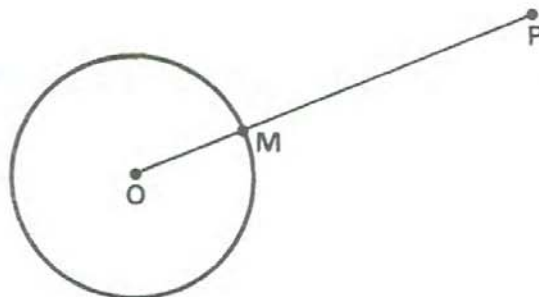
b) quais pertencem à circunferência? *S, E, B*

c) quais são exteriores à circunferência? *A, T*

3) Determine:

a) o diâmetro de uma circunferência cujo raio mede 4,5 cm. *9 cm*

b) o raio de uma circunferência cujo diâmetro mede 17 cm. *8,5 cm*

c) o diâmetro de uma circunferência cujo raio é igual a x. *2x*

4) O diâmetro da circunferência mede 7 cm e o segmento $\overline{OP}$ mede 12 cm.

$\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM}$

$\overline{MP} = 12 - 3,5$

$\overline{MP} = 8,5$

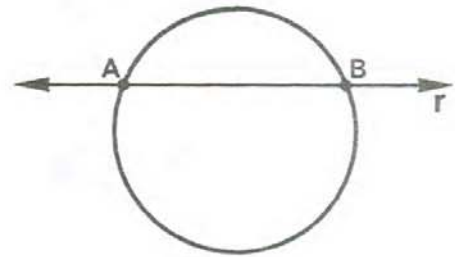
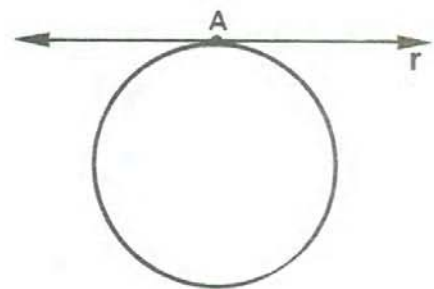
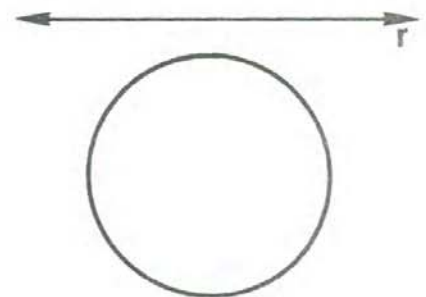
Qual a medida do segmento $\overline{MP}$? *Resp.: 8,5 cm*

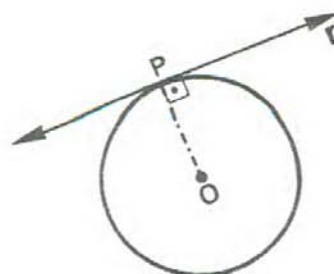
5) O raio de uma circunferência é dado por $r = 2x - 6$. Se o diâmetro mede 20 cm, calcule x.

$2x - 6 = 10 \Rightarrow x = 8$ *Resp.: 8 cm*

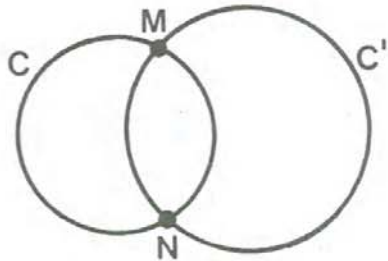
POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Uma reta r e uma circunferência C podem ocupar as seguintes posições:

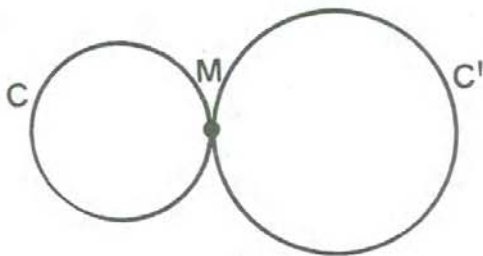
a) $C \cap r = \{ A, B \}$ (dois pontos comuns)
Dizemos que:
A reta é **secante** à circunferência.

b) $C \cap r = \{ A \}$ (um ponto comum)
Dizemos que:
A reta é **tangente** à circunferência.

c) $C \cap r = \varnothing$ (não há ponto comum)
Dizemos que:
A reta é **externa** à circunferência.

Propriedade:

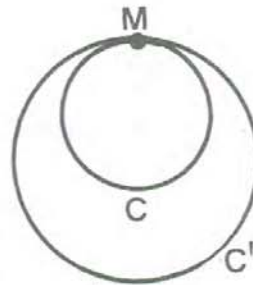
Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Duas circunferências distintas podem ser:

a) **Secantes:** têm dois pontos comuns.

$C \cap C' = \{ M, N \}$

b) **Tangentes**: têm um único ponto comum.

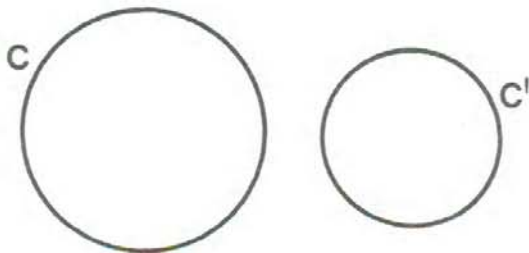
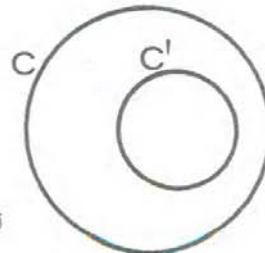
tangentes exteriores

tangentes interiores

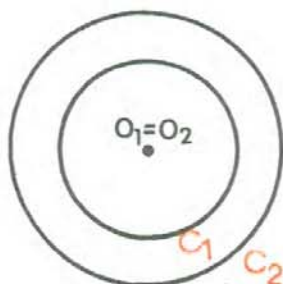
$C \cap C' = \{ M \}$

c) **Não-secantes**: não têm ponto comum.

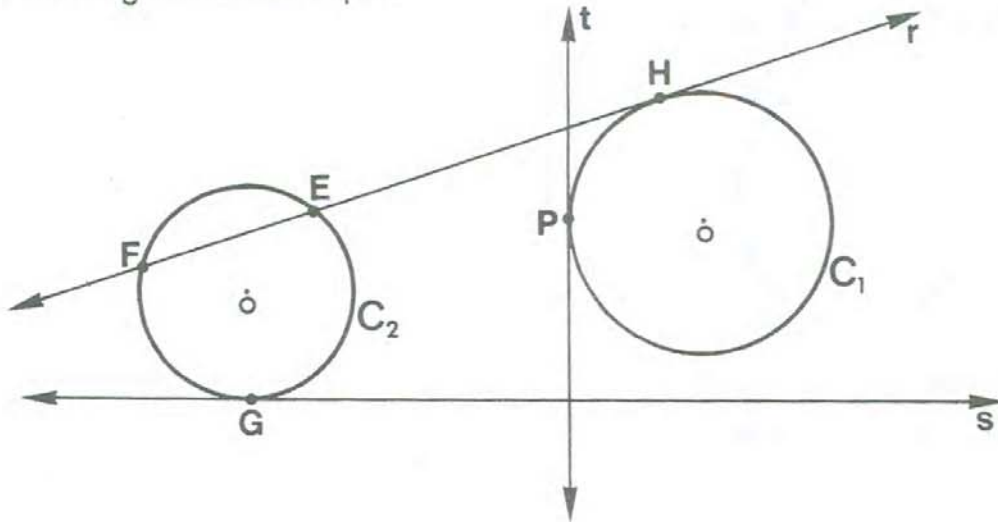
exteriores

interiores

C'

$C \cap C' = \varnothing$

Caso particular:

Duas circunferências não-secantes e que têm o mesmo centro são chamadas **concêntricas**.

EXERCÍCIOS

1) Observe a figura e classifique:

a) A reta s em relação à circunferência C_2. *Tangente*

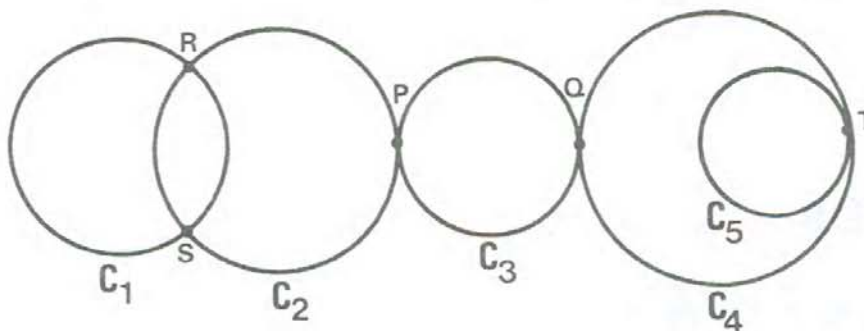
b) A reta r em relação à circunferência C_2. *Secante*

c) A reta r em relação à circunferência C_1. *Tangente*

d) A reta t em relação à circunferência C_1. *Tangente*

e) A reta s em relação à circunferência C_1. *Externa*

f) A reta t em relação à circunferência C_2. *Externa*

2) Observe a figura e responda:

a) Qual a posição relativa entre as circunferências C_1 e C_2? *Secantes*

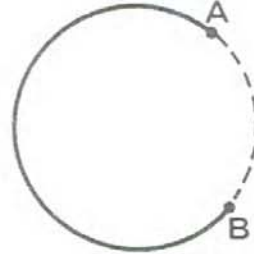
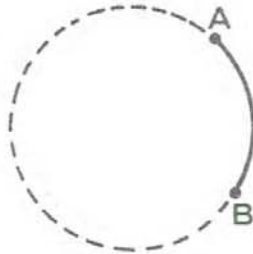
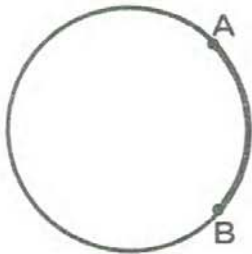
b) Qual a posição relativa entre as circunferências C_2 e C_3? *Tangentes exteriores*

c) Qual a posição relativa entre as circunferências C_1 e C_3? *Não-secantes*

d) Qual a posição relativa entre as circunferências C_3 e C_4? *Tangentes exteriores*

e) Qual a posição relativa entre as circunferências C_4 e C_5? *Tangentes interiores*

ARCOS

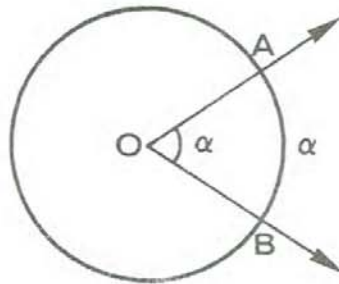
Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes é denominada **arco**.

arco menor

arco maior

Indicação: $\widehat{AB}$

Os pontos A e B são as extremidades desses arcos.

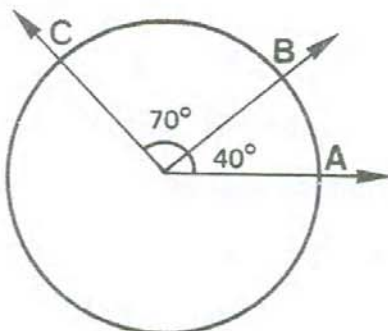
ÂNGULO CENTRAL

Ângulo central é aquele cujo vértice está no centro da circunferência.

Observe que:

> O ângulo central e o arco determinado por ele têm a mesma medida.

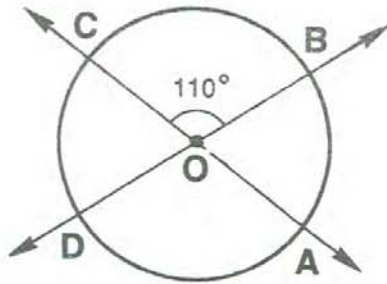
Na figura, temos: m ($A\hat{O}B$) = m ($\widehat{AB}$) = α.

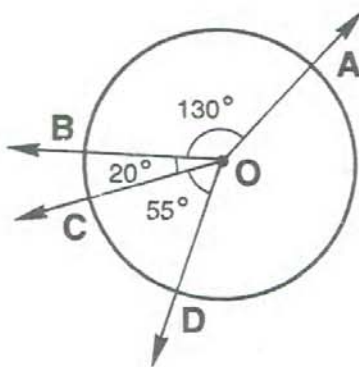
EXERCÍCIOS

1) Observe a figura e determine o arco menor solicitado:

a) m ($\widehat{AB}$) *40°*

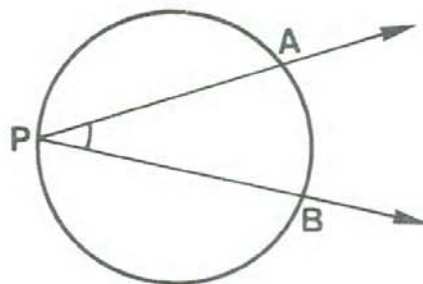
b) m ($\widehat{BC}$) *70°*

c) m ($\widehat{AC}$) *110°*

2) Observe a figura e determine o arco menor solicitado:

a) m ($\widehat{BC}$) 110°
b) m ($\widehat{CD}$) 70°
c) m ($\widehat{AB}$) 70°
d) m ($\widehat{AD}$) 110°
e) m ($\widehat{BD}$) 180°
f) m ($\widehat{AC}$) 180°

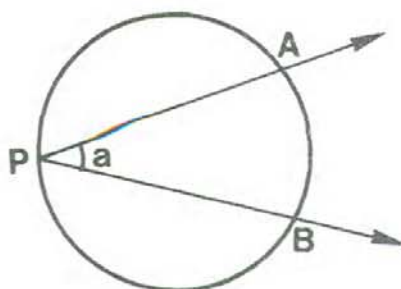
3) Observe a figura e determine o arco menor solicitado:

a) m ($\widehat{CD}$) 55°
b) m ($\widehat{BC}$) 20°
c) m ($\widehat{AC}$) 150°
d) m ($\widehat{BD}$) 75°

ÂNGULO INSCRITO

Ângulo inscrito é aquele cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são semi-retas secantes.

$A\hat{P}B$ é o ângulo inscrito.

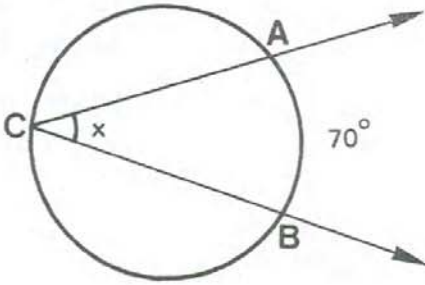
Propriedade:

A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco correspondente.

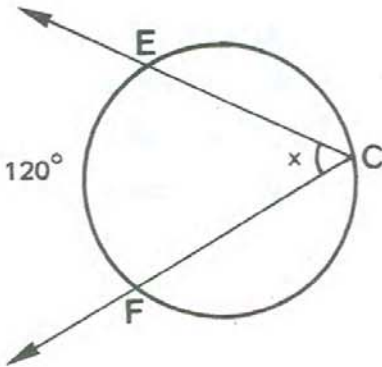
Na figura, temos:

$$\hat{a} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Exemplos:

Determinar os ângulos indicados:

a)

Solução:

$$x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

b)

Solução:

$$x = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

EXERCÍCIOS

1) Determine os ângulos indicados nas figuras:

a)

$x = \frac{50°}{2} = 25°$

b)

$y = \frac{40°}{2} = 20°$

c)

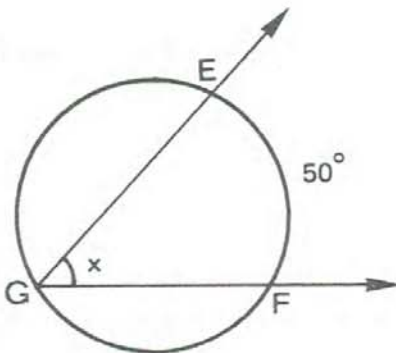
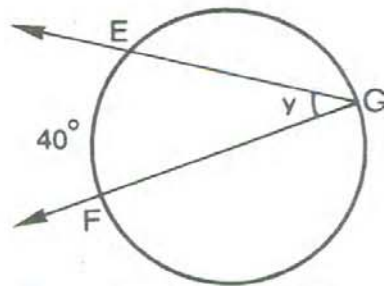
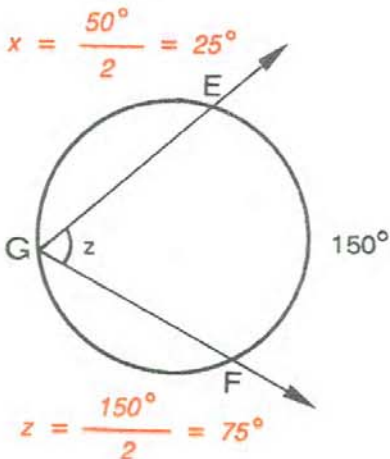
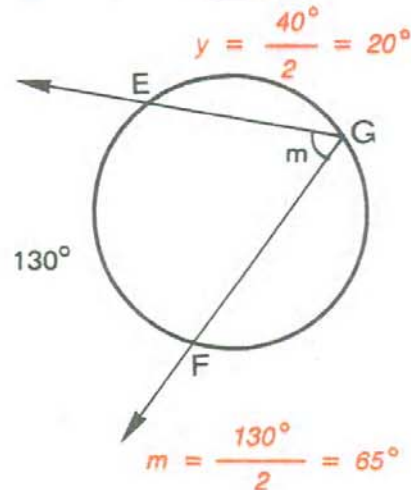
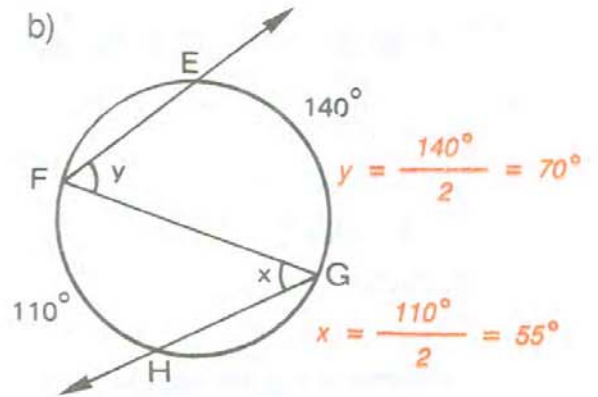
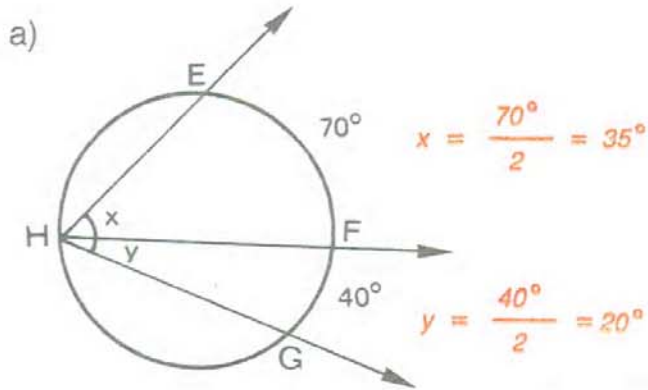
$z = \frac{150°}{2} = 75°$

d)

$m = \frac{130°}{2} = 65°$

2) Determine os ângulos indicados nas figuras:

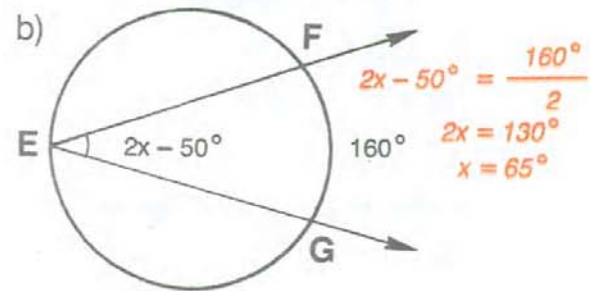
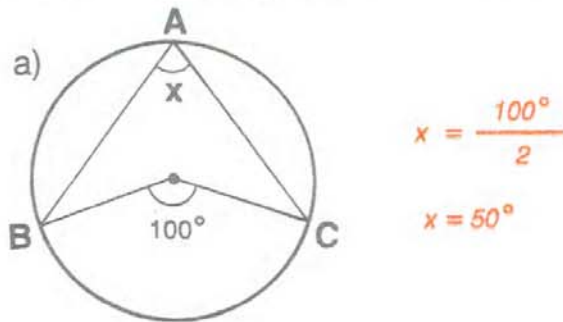
a)

b)

3) Determine os ângulos indicados nas figuras:

a)

$x = \frac{100°}{2}$

$x = 50°$

b)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

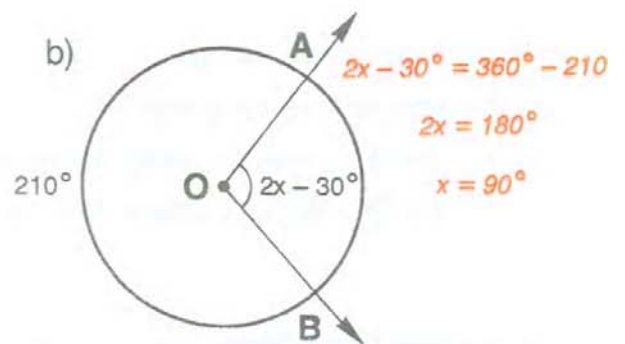
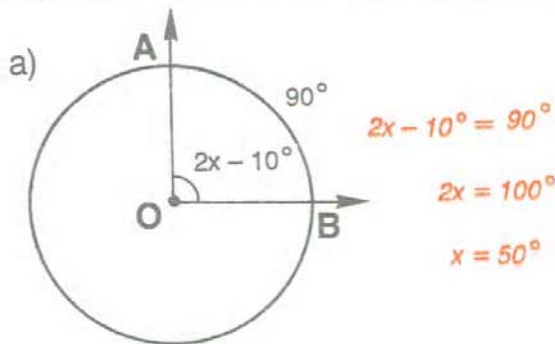
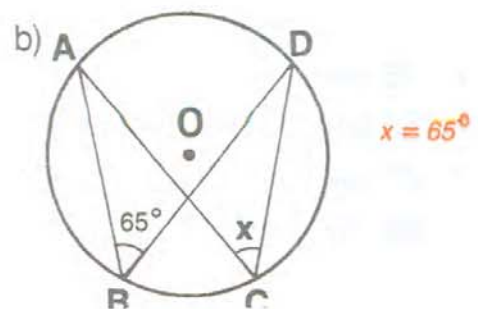
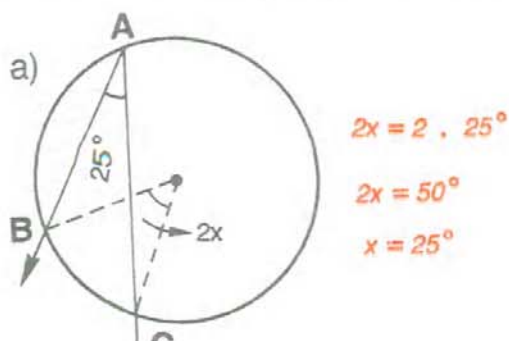
1) Determine x, sabendo que O é o centro da circunferência:

a)

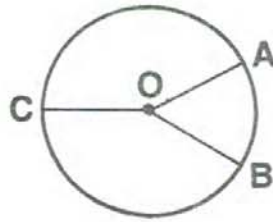
b)

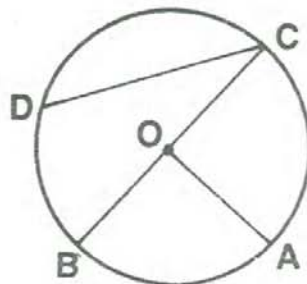
2) Determine os ângulos indicados nas figuras:

a)

b)

TESTES

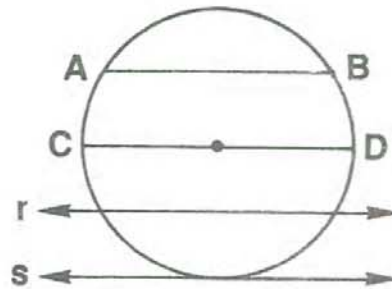
1) Na figura abaixo, qual dos pontos está mais próximo do ponto O?

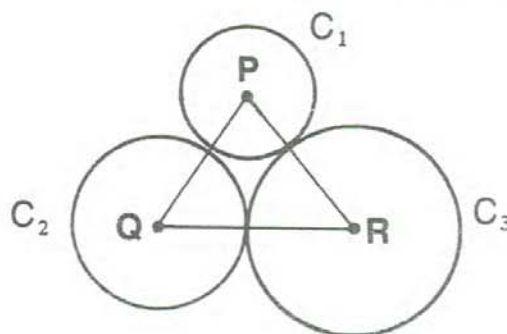
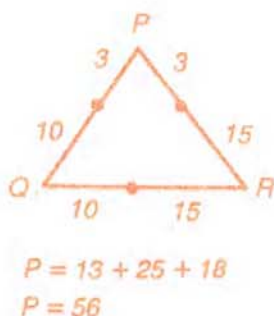
a) o ponto A
b) o ponto B
c) o ponto C
d) n.d.a.

2) Observe a figura seguinte e as afirmações:

I) $\overline{OA}$ é raio.
II) $\overline{CB}$ é diâmetro.
III) $\overline{CB}$ é corda.
IV) $\overline{CD}$ é corda.

Quantas são verdadeiras?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

3) Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e as retas r e s recebem, respectivamente, os seguintes nomes:

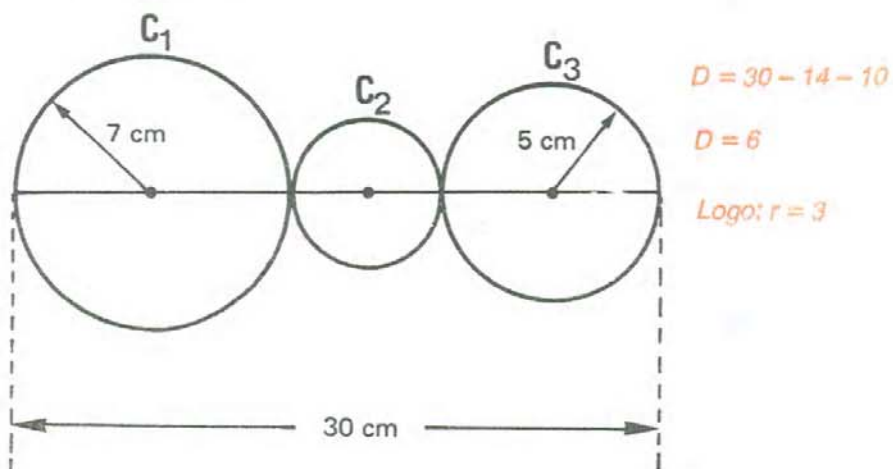
a) raio, corda, tangente e secante.
b) raio, diâmetro, secante e tangente.
c) corda, diâmetro, tangente e secante.
d) corda, diâmetro, secante e tangente.

4) As três circunferências são tangentes. Se o raio de C_1 mede 3 cm, o raio de C_2 mede 10 cm e o diâmetro de C_3 é 30 cm, então o perímetro do triângulo PQR é:

a) 46 cm
b) 56 cm
c) 71 cm
d) 86 cm

5) Na figura seguinte, a circunferência C_2 é tangente a duas circunferências exteriores (C_1 e C_3). O raio de C_2 mede:

■ a) 3 cm

b) 6 cm

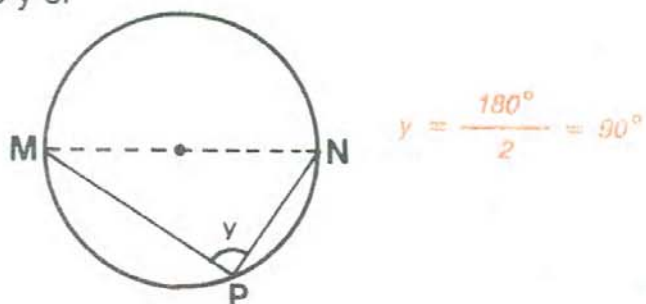
c) 8 cm

d) 9 cm

6) Na figura seguinte, o valor de y é:

a) 45°

b) 60°

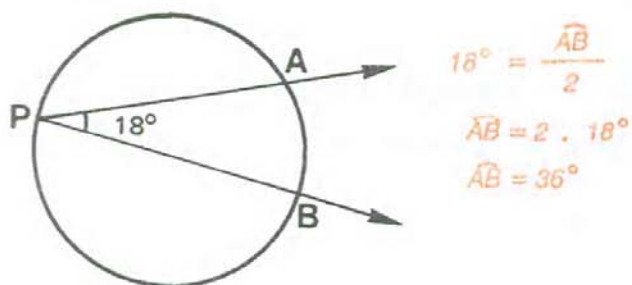
■ c) 90°

d) 180°

7) Na figura seguinte, a medida do arco $\widehat{AB}$ é:

a) 9°

b) 18°

c) 24°

■ d) 36°

8) Se o ponto O é o centro da circunferência, então o valor de x é:

a) 25°

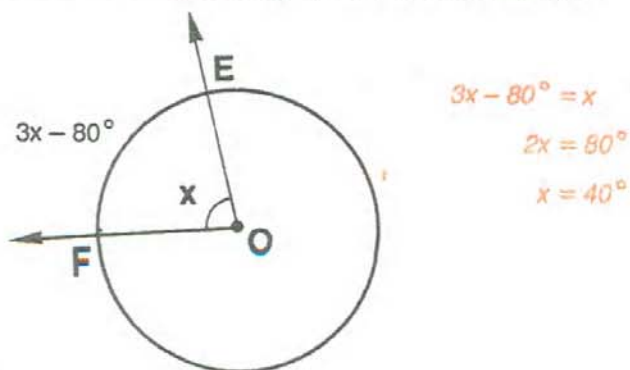
b) 30°

c) 35°

■ d) 40°

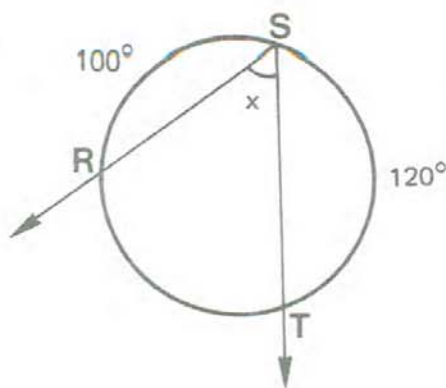
$3x - 80° = x$

$2x = 80°$

$x = 40°$

9) Na figura seguinte, o valor de x é:

a) 60°

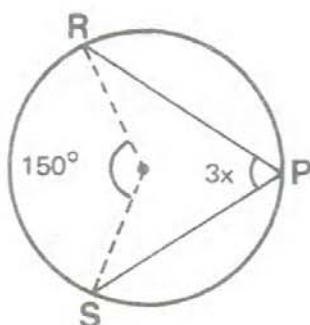
■ b) 70°

c) 120°

d) 140°

10) Na figura seguinte, o valor de x é:

■ a) 25°

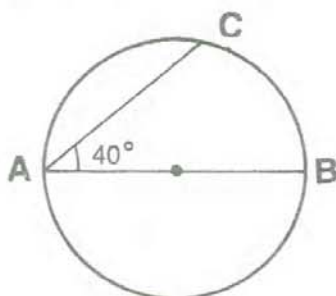
b) 35°

c) 50°

d) 75°

11) (PUC-SP) Na figura, AB é diâmetro da circunferência. O menor dos arcos ($\widehat{AC}$) mede:

■ a) 100°

b) 120°

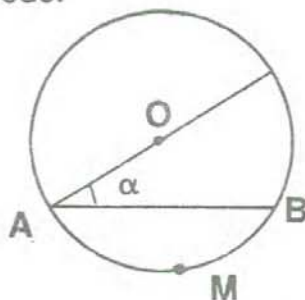
c) 140°

d) 150°

12) (CESGRANRIO-RJ) Em um círculo de centro O, está inscrito o ângulo α. Se o arco $\widehat{AMB}$ mede 130°, o ângulo α mede:

■ a) 25°

b) 30°

c) 40°

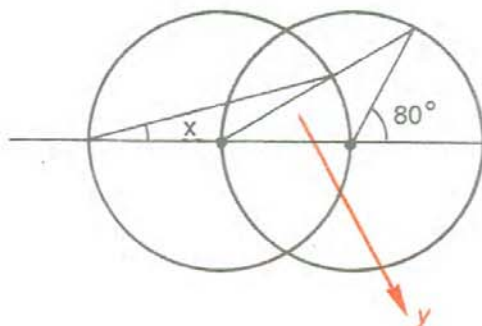
d) 45°

$\alpha = \frac{50°}{2}$

$\alpha = 25°$

13) (UCS-BA) A medida do ângulo x, representado na figura, é:

a) 15°

 b) 20°

c) 25°

d) 30°

7ª série

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

SUGESTÃO DE PLANEJAMENTO DE CURSO

OBJETIVOS GERAIS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

O curso de 1º grau deverá proporcionar condições para que o aluno:

- Conheça e utilize corretamente a linguagem matemática.
- Desenvolva a capacidade de: analisar, relacionar, comparar, abstrair, generalizar.
- Desenvolva hábitos de estudo, de rigor e precisão e de concisão.
- Desenvolva habilidades específicas de medir e comparar grandezas, calcular, construir e consultar tabelas e gráficos.
- Adquira conhecimentos básicos, a fim de possibilitar sua integração na sociedade em que vive.

Este suplemento não integra o livro do aluno.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Identificar os números quadrados perfeitos. • Calcular a raiz quadrada de um número inteiro positivo.	1 Raiz quadrada.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto.	• Provas • Correção dos exercícios complementares.
• Identificar números racionais. • Identificar números irracionais. • Identificar e representar os subconjuntos de IR. • Reconhecer e aplicar as propriedades no conjunto IR.	2 Conjunto dos números reais.	• Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas.	
• Distinguir expressões numéricas de expressões algébricas. • Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.	3 Valor numérico de uma expressão algébrica.	• Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse.	
• Distinguir a parte numérica (coeficiente) e a parte literal de um monômio. • Determinar o grau de um monômio. • Identificar polinômios. • Determinar o grau de um polinômio com uma variável. • Reconhecer polinômios completos e incompletos.	4 Expressões algébricas.	• Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	
• Identificar termos semelhantes. • Reduzir termos semelhantes.	5 Termos semelhantes.		

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Efetuar adição e subtração de monômios. • Efetuar multiplicação e divisão de monômios. • Efetuar potenciação e radiciação de monômios.	6 Operações com monômios.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Efetuar adição e subtração de polinômios. • Efetuar a multiplicação de polinômio por polinômio. • Efetuar a divisão de polinômio por polinômio.	7 Operações com polinômios.		
• Desenvolver o quadrado da soma ou da diferença de dois termos. • Determinar o produto da soma pela diferença de dois termos. • Desenvolver o cubo da soma ou da diferença de dois termos.	8 Produtos notáveis.		
• Identificar os diferentes casos de fatoração. • Aplicar os diferentes casos de fatoração.	9 Fatoração.		
• Identificar frações algébricas. • Simplificar frações algébricas. • Efetuar as operações que envolvem frações algébricas.	10 Frações algébricas.		
• Identificar equações fracionárias. • Determinar o conjunto-verdade de uma equação fracionária.	11 Equações fracionárias.		

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Identificar equações literais. • Determinar o conjunto-verdade de uma equação literal.	⑫ Equações literais do 1º grau.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Reconhecer o ponto, a reta e plano como entes primitivos, não definidos. • Identificar pontos colineares. • Identificar retas paralelas e retas concorrentes. • Identificar segmentos consecutivos e segmentos colineares. • Identificar conjuntos convexos.	⑬ Introdução à Geometria.		
• Reconhecer o vértice e os lados de um ângulo. • Determinar a medida de um ângulo. • Conhecer as unidades: grau, minuto e segundo, realizando transformações de uma unidade para outra. • Identificar ângulos: reto, agudo e obtuso. • Reconhecer ângulos complementares e suplementares. • Reconhecer ângulos opostos pelo vértice. • Resolver problemas sobre medidas de ângulos. • Identificar e dar nomes aos ângulos formados por duas paralelas e uma transversal.	⑭ Ângulos		

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Classificar os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. • Identificar: medianas, alturas e bissetrizes de um triângulo. • Resolver exercícios que envolvam ângulos internos de um triângulo.	⑮ Triângulos.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Reconhecer triângulos congruentes. • Identificar os casos de congruência de triângulos. • Aplicar as propriedades da congruência nos triângulos.	⑯ Congruência de triângulos		
• Identificar quadriláteros convexos. • Classificar os paralelogramos. • Classificar os trapézios. • Resolver exercícios que envolvam ângulos de quadriláteros.	⑰ Quadriláteros.		
• Identificar polígonos. • Identificar polígonos convexos e não convexos. • Classificar polígonos pelo número de lados. • Calcular a soma dos ângulos internos de um polígono. • Calcular o número de diagonais de um polígono convexo.	⑱ Polígonos.		
• Identificar centro, raio, corda e diâmetro. • Distinguir circunferência de círculo. • Identificar as posições relativas de duas circunferências. • Identificar as posições relativas de uma circunferência e uma reta. • Calcular a medida dos ângulos central e inscrito.	⑲ Circunferência e círculo.		

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

ACAFE-SC – Associação Catarinense de Fundações Educacionais ao Ensino Superior (Santa Catarina)

CEUB – Centro de Ensino Unificado de Brasília

CESCEA-SP – Centro de Seleção de Candidatos das Escolas de Economia e Administração (São Paulo).

CESCEM-SP – Centro de Seleção de Candidatos das Escolas de Medicina (São Paulo)

CESESP-PE – Centro de Estudos Superiores do Estado de Pernambuco

CESGRANRIO-RJ – Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)

C. NAVAL-RJ – Colégio Naval – Angra dos Reis (Rio de Janeiro)

EE MAUÁ-SP – Escola de Engenharia Mauá (São Paulo)

E. NAVAL-RJ – Escola Naval do Rio de Janeiro.

EPCAR-MG – Escola Preparatória de Cadetes do Ar – Barbacena (Minas Gerais)

ESAN-SP – Escola Superior de Administração e Negócios (São Paulo)

ETI-SP – Escola Técnica Industrial – São Bernardo do Campo (São Paulo)

ESCOLA TÉCNICA-SP – Escola Técnica Federal de São Paulo

FAAP-SP – Fundação Armando Álvares Penteado (São Paulo)

F. ALFENAS-MG – Faculdade de Alfenas (Minas Gerais)

FCG-SP – Fundação Carlos Chagas (São Paulo)

FCL-SP – Faculdade de Jornalismo Cásper Líbero (São Paulo)

FCMSC-SP – Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa (São Paulo)

FEC-SP – Faculdade de Educação e Cultura do ABC (São Paulo)

FECM-SP – Faculdade de Economia Cândido Mendes (São Paulo)

FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)

FEP-PA – Faculdade de Engenharia do Pará

FGV-SP – Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)

FIB-RJ – Faculdades Integradas Benett (Rio de Janeiro)

FIUBE-MG – Faculdades Integradas de Uberaba (Minas Gerais)

F. MAUÁ-SP – Faculdade de Engenharia Mauá (São Paulo)

FM-Barbacena-MG – Faculdade de Medicina de Barbacena (Minas Gerais)

FM-Itajubá-MG – Faculdade de Medicina de Itajubá (Minas Gerais)

FMJ-SP – Faculdade de Medicina de Jundiaí (São Paulo)

FMU-SP – Faculdades Metropolitanas Unidas (São Paulo)

F. OBJETIVO-SP – Faculdades Objetivo (São Paulo)

FSA-SP – Fundação Santo André (São Paulo)

FUVEST-SP – Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

GV-SP – Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)

ILHÉUS-ITABUNA-BA – Federação das Escolas Superiores de Ilhéus e Itabuna (Bahia)

ITE-Bauru-SP – Instituição Toledo de Ensino – Bauru (São Paulo)

MACK-SP – Universidade Mackenzie (São Paulo)

MAPOFEI-SP – Mauá – Politécnica – Fei (São Paulo)

MED-ABC – Faculdade de Medicina do ABC (São Paulo)

MED-Pouso Alegre– Faculdade de Medicina de Pouso Alegre (Minas Gerais)

MED-Santos – Faculdade de Medicina de Santos (São Paulo)

OSEC-SP – Organização Santamarense de Educação e Cultura (São Paulo)

PUC-DF – Pontifícia Universidade Católica do Distrito Federal.

PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC-RS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

SANTA CASA-SP – Faculdade de Medicina da Santa Casa (São Paulo)

UB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)

UC-MG – Universidade Católica de Minas Gerais

UCS-BA – Universidade Católica de Salvador (Bahia)

UDF – Universidade do Distrito Federal

UE-CE – Universidade Estadual do Ceará

UE-MS – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul.

UE-MT – Universidade Estadual do Mato Grosso.

UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina (Paraná)

UEPG-PR – Universidade Estadual de Ponta Grossa (Paraná)

UFB-DF – Universidade Federal de Brasília (Distrito Federal)

UF-AL – Universidade Federal de Alagoas

UF-BA – Universidade Federal da Bahia

UF-CE – Universidade Federal do Ceará

UF-ES – Universidade Federal do Espírito Santo

UF-GO – Universidade Federal de Goiás

UF-MA – Universidade Federal do Maranhão

UF-MG – Universidade Federal de Minas Gerais

UF-MT – Universidade Federal do Mato Grosso

UF-PA – Universidade Federal do Pará

UF-PR – Universidade Federal do Paraná

UF-RN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UF-RJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UF-RS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UF-SE – Universidade Federal de Sergipe

UFSC-SP – Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)

UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)

UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)

UGF-RJ – Universidade Gama Filho (Rio de Janeiro)

UJF-MG – Universidade de Juiz de Fora (Minas Gerais)

UMC-SP – Universidade de Moji das Cruzes (São Paulo)

UNB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)

UNESP-SP – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (São Paulo)

USP – Universidade de São Paulo

UU-MG – Universidade de Uberaba (Minas Gerais)

HINO NACIONAL

Letra: *Osório Duque Estrada*
Música: *Francisco Manoel da Silva*

Ouviram do Ipiranga às margens plácidas
De um povo heróico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó Liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
– Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!